LA MODERNA TEORIA DE CONTROL OPTIMO:

UNA APLICACION AL MONOPOLIO ESPAÑOL DE TABACOS

Tesis Doctoral dirigida por el Doctor

D. Gonzalo ARNAIZ VELLANDO

M.a. Isabel TOLEDO MUÑOZ
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID
- 1981 -

Esta tesis se dedica al estudio de la Teoría del Control Optimo, así como a realizar un intento de aplicación de la misma a una parcela específica de la economía española.

Consta de una introducción, cuatro capítulos y dos anexos. Los tres primeros Capítulos, así como los dos anexos, se dedican al estudio de distintos elementos teóricos relacionados con la teoría que nos ocupa; el Capítulo cuatro constituye la aplicación práctica de algunos elementos de dicha teoría a la realidad económica.

El trabajo ha sido desarrollado en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Autónoma de Madrid, en la que la autora fue primero alumna y más tarde Profesor Ayudante, en el Departamento de Teoría Económica.

El capítulo de agradecimientos va por tanto dedicado a todas cuantas personas de dicha Facultad han colaborado en la formación académica de la doctoranda, y en especial a los siguientes:

En primer lugar, me siento profundamente agradecida por la inestimable ayuda que, para la realización de este trabajo, prestó su director D. Gonzalo Arnaiz Vellando. Su apoyo constante y su paciencia ilimitada me alentaron para superar las dificultades que se fueron planteando a lo largo del mismo.

A todos los compañeros del Departamento de Teoría Económica, y en especial a su director, D. Alejandro Lorca Corrons, que ha impulsado siempre con su entusiasmo la labor docente e investigadora del doctorando. También a los doctores del Departamento D. Joaquín Vera Grijalba y D. Juan Carlos Zapatero por su ayuda en la realización de algunos puntos concretos del trabajo.

A Ma. del Pilar Martín-Guzmán, cuyos consejos como especialista en tema central de nuestro trabajo han sido de gran valor en la concepción global del mismo.

Por último, un agradecimiento especial al Servicio de Estudios de Tabacalera, y en particular a D. Manuel Blanco Losada, Jefe del mismo y compañero en el Departamento de Teoría Económica, cuya ayuda fue inestimable en la realización del trabajo empírico.

I N D I C E

ANEXO B.- " LA PROGRAMACION DINAMICA"

BIBLIOGRAFIA

En este trabajo se pretende abordar el estudio de algunos de los elementos fundamentales de la Teoría del Control Optimo, y realizar un intento de aplicación práctica de la misma a una parcela concreta de la actividad económica.

Por situar la materia objeto de nuestro estudio en un contexto general, puede decirse que la teoría del control óptimo constituye el resultado de una moderna evolución del cálculo de variaciones.

El momento histórico de surgimiento de la teoría que nos ocupa puede situarse entre las décadas 50 y 60 del presente siglo, a lo largo de las cuales se habían ido desarrollando una serie de estudios llevados a cabo por distintos equipos de científicos. Entre estos estudios sobresalen los realizados por el matemático ruso Pontryagin y sus colaboradores, que culminarían con la publicación y rápida divulgación en el mundo científico anglosajón de la obra "La teoría matemática de los procesos óptimos" (1962), que puede señalarse como el verdadero punto de eclosión de la teoría del control óptimo.

Parece conveniente mencionar aquí, por los puntos de contacto con la teoría del control óptimo, la obra de Bellman, principal teórico de la técnica conocida como Programación Dinámica, y también desarrollada en las mismas fechas que aquélla y con objetivos similares: ambas venían a intentar resolver algunos de los problemas no abordables por los esquemas tradicionales del Cálculo de Variaciones, y de hecho puede decirse que lograron ampliar considerablemente el campo de actuación del mismo.

De cara a lograr una perspectiva global de la teoría que nos ocupa en relación a las dos mencionadas, cálculo de variaciones y programación dinámica, en nuestro trabajo se dedican distintos apartados a analizar las conexiones y diferencias existentes, así como dos anexos específicos; sobre ellos volveremos más adelante.

Intentemos ahora dar una definición general de lo que puede entenderse como Teoría del Control Optimo. A grandes rasgos, puede decirse que esta teoría se ocupa de problemas de optimización de los sistemas dinámicos, basándose para ello en las acciones o decisiones que son llevadas a cabo para guiar la conducta temporal de un sistema dinámico que está siendo controlado.

La estructura de un programa de control óptimo es muy típica. En su versión simple es un sistema dinámico (lineal o no lineal, con tiempo discreto o contínuo) para el que se especifican las funciones de entrada. Hay una "función-objetivo", cuyo valor queda especificado por el comportamiento del sistema, que es, en algún sentido, una medida de la calidad del comportamiento. El problema de control óptimo es entonces seleccionar la función de control que optimiza (maximiza o minimiza) la función-objetivo.

Así, por ejemplo, el sistema dinámico podría ser un vehículo espacial (utilizando el símil más conocido y representativo del sistema dinámico); los inputs corresponderían al cohete impulsor. El objetivo podría ser alcanzar la luna con un gasto mínimo de combustible.

También el sistema podría representar la dinámica de la acumulación individual de riqueza, con sus controles correspondientes, como el trabajo y los niveles de gasto anuales. El problema consistiría en la planificación a lo largo del tiempo del trabajo y del gasto, con objeto de maximizar la utilidad. Otro sistema podría ser la economía de una nación, correspondiéndose los controles con la política monetaria y fiscal del gobierno. El objetivo en este caso podría ser minimizar las desviaciones agregadas de desempleo y las tasas de interés sobre las metas fijadas.

De hecho, y en consonancia con lo anteriormente expuesto, las primeras aplicaciones del Principio del Máximo de Pontryagin se centraron en el campo de la Física, en parcelas concretas como la investigación aeroespacial, con problemas del tipo de los anteriormente mencionados.

Posteriormente, estas aplicaciones se ampliaron al control de otros procesos como el de producción en una planta química. El problema en estos casos era optimizar alguna combinación de calidad y coste controlando la mezcla de inputs o de condiciones como la temperatura y presión.

No será sin embargo hasta finales de la década de los sesenta cuando se empiece a aplicar a los problemas estrictamente económicos. Fundamentalmente se ha relacionado con un campo concreto de la Teoría Económica: la Teoría del Capital.

En términos generales, podríamos decir que la Teoría del Capital intenta explicar las condiciones y causas por las que la contribución de un factor duradero de producción al valor del producto durante su período de vida supera a su coste de adquisición.

Pero, como otras disciplinas económicas, la Teoría del Capital fue desarrollada en el contexto del equilibrio estacionario. Este contexto ofrecía tan escasas posibilidades de verificación real que fueron buscándose poco a poco contextos más amplios. Tal es el origen del comienzo de aplicación, hace 50 años aproximadamente, a la Teoría del Capital del Cálculo de Variaciones.

El Cálculo de Variaciones, sin embargo, está considerado como una materia más bien complicada por la mayoría de los economistas y además, debido a sus formulaciones convencionales, aparece demasiado rígida para ser aplicada a muchos problemas económicos. La aplicación de este instrumento conceptual a la Teoría del Capital fue esporádica y poco rigurosa hasta muy recientemente, y la Teoría del Capital permaneció rezagada por las limitaciones que este hecho le imponía.

Todo ésto ha cambiado abruptamente en la década pasada como resultado del cambio de orientación del Cálculo de Variaciones a que nos hemos referido. La Teoría del Control Optimo ha llegado a ser, merecidamente, el instrumento central de la Teoría del Capital. Como resultado de ello, la Teoría del Capital se ha transformado tan profundamente que ha sido rebautizada como Teoría del Crecimiento, pudiendo ser aplicada ahora a numerosos trabajos prácticos y teóricos que antes no podían ni siquiera ser formulados correctamente.

Pero las aplicaciones dentro de la economía no se han restringido tan sólo a la teoría del crecimiento, sino que hoy en día abarcan parcelas muy diversas, tal y como ponemos de manifiesto en el Capítulo 4 de este trabajo, dedicado en su parte central a realizar precisamente un ejercicio de aplicación de la Teoría del Control Optimo en el ámbito de la economía española: la determinación de las trayectorias de precios óptimos que maximizan los ingresos de una determinada empresa, con control sobre los precios.

Expondremos a continuación los temas principales abordados en nuestro trabajo, siguiendo la estructura de exposición del mismo. Pero antes de entrar en dicha descripción, conviene que señalemos dos características esenciales del trabajo que hemos realizado.

En primer lugar, se ha mencionado anteriormente que el sistema dinámico que es la base de la teoría puede ser formulado en tiempo discreto o contínuo; en nuestro caso se ha optado por partir de un enfoque con tiempo contínuo, puesto que el Principio del Máximo de Pontryagin, elemento central de la teoría que nos ocupa, que será analizado más adelante, resulta más aplicable en este ámbito que en el discreto.

Por otro lado, conviene mencionar que el trabajo desarrollado en estas páginas sigue también el planteamiento original de Pontryagin en otro aspecto: en que parte de un enfoque determinístico del Principio del Máximo, frente al enfoque estocástico desarrollado en los últimos años por una serie de autores (1).

A continuación vamos a exponer las líneas de investigación de las que consta nuestro trabajo.

El primer capítulo se dedica a la formulación del problema de control básico de optimización en tiempo contínuo con condiciones extremas especificadas. Se parte para ello de una descripción exhaustiva de los distintos elementos que intervienen en un problema general de control. Con estos elementos se pasa al planteamiento formal del problema. La determinación de la solución conduce, como en cualquier problema de optimización estático, a explicitar un conjunto de condiciones necesarias de optimalidad entre las que se encuentra el Principio de Máximo.

---

(1) En la bibliografía anexa a este trabajo se detallan algunos trabajos que recogen formulaciones del Principio del Máximo estocástico y con tiempo discreto: Benavie (1973), Chow (1970), Chow (1975), Fel'dbaum (1965), Luenberger (1975), Miller (1979), Sethi y Thompson (1980).

El conjunto de condiciones necesarias no supone ecuaciones desconocidas respecto al Cálculo de Variaciones; lo único realmente nuevo es la forma en la cual las variables de control son determinadas en cada punto en el tiempo. Se demuestra que, en cada instante t, la variable de control se elige para maximizar la función Hamiltoniana para cada valor especificado del estado en ese tiempo.

A esta regla se la denomina Principio de Máximo, aunque a veces, impropiamente, se aplique tal denominación al conjunto de condiciones necesarias.

La sección siguiente se dedica al estudio de las condiciones suficientes de optimalidad. Como principal conclusión de dicha sección se llega a ver que el Principio del Máximo, en casos especiales, es suficiente para el Control óptimo. Entre estos casos especiales se encuentra el de funciones cóncavas en las variables relevantes, que es analizado con cierto detalle en la mencionada sección.

También trataremos los problemas con condiciones extremas variables; con ésto queremos decir que estudiaremos casos en que el tiempo y estado, tanto inicial como terminal, pueden variar. Entre estos problemas es de especial interés el de extremos que terminan sobre variedades regulares previamente especificadas por las correspondientes hipersuperficies.

El Capítulo II se dedica al estudio de los problemas de control con restricciones sobre las variables de control y sobre las variables de estado. Para ello se parte en cada caso de los desarrollos teóricos oportunos que permiten transformar el problema de control con restricciones en uno clásico, susceptible de resolución por la regla de los multiplicadores de Lagrange. La diversidad de restricciones que, bien de igualdad, bien de desigualdad, pueden condicionar la elección de las variables lleva a que distingamos dos tipos de condiciones de optimalidad:

- Por un lado, las que corresponden a segmentos de la trayectoria óptima que descansan en el interior de la región admisible.
- Por otro, las correspondientes a segmentos límite. Aquí, las condiciones necesarias incorporan términos adicionales que recogen la presencia de las restricciones en la solución óptima.

El problema de control y el Principio de Máximo asociado al que se llega en el Capítulo II, puede considerarse, junto con los desarrollos del Capítulo I, el cuerpo central teórico de nuestro trabajo. A éstos se añade un tercer capítulo que recoge todos aquellos aspectos relacionados con el Principio de Máximo de Pontryagin no tratados en profundidad en los capítulos anteriores, y considerados relevantes en cuanto a que, de una u otra forma, deben tenerse presentes a la hora de llevar a cabo la aplicación práctica que se realiza a continuación.

El primer tema dentro del Capítulo III se dedica a la interpretación económica del Principio de Máximo, haciendo especial hincapié en el papel que juegan las variables auxiliares, como precios sombra o pseudoprecios.

Si bien en los problemas formulados hasta el Capítulo III el tiempo entraba como variable explícita en todas las funciones, puede suceder que ésto no sea así y que la variable t sólo aparezca como argumento del estado y del control. Según esta diferencia, los problemas de control se clasifican en autónomos y no autónomos.

Nuestro objetivo en este punto es, mediante la transformación del problema no autónomo en uno autónomo con el cambio de variables $t = y_{n+1}$, siendo y_{n+1} una variable estado más, llegar a obtener para el caso autónomo condiciones necesarias de optimalidad.

Otro tema interesante dentro de este Capítulo es el control lineal. Por control lineal se entiende un problema en el que las funciones que lo forman -ésto es, el sistema dinámico, las funciones restricción y el funcional objetivo- son lineales en las variables de estado y control. Dentro de esta modalidad de control merece especial mención el caso de restricciones control del tipo $R(t, U) < \beta$. La importancia de estos problemas es que permite, a partir de los teoremas de la Programación Lineal, garantizar para el problema de control en cuestión la existencia de un control óptimo. La demostración se basa en que si el conjunto de variables de control que satisfacen la restricción de desigualdad enunciada es un poliedro convexo y cerrado, entonces al menos un extremo, en este caso un vértice, es una solución óptima del problema.

Enlazando con los anteriores temas, y dentro de este Capítulo III, se dedica un epígrafe a la distinción existente entre los dos tipos básicos de control, el control open-loop y el control closed-loop ó feedback. En la primera modalidad el control viene especificado como una función del tiempo, y tiene el inconveniente de no ser capaz de recoger cualquier desviación del sistema desde el sendero óptimo, pudiendo en ese caso llevar al sistema a un alejamiento cada vez mayor de su trayectoria óptima.

En el otro tipo de control óptimo, el feedback, el control es una función del estado y, por tanto, cualquier desviación del sendero óptimo la recibe la trayectoria de control a través de la función de estado.

La penúltima sección de este tercer Capítulo se encarga de estudiar las interrelaciones, ventajas y desventajas de las tres corrientes teóricas que constituyen lo que ha venido a llamarse "Optimización Dinámica". El estudio se inicia con un análisis comparativo entre el Principio de Máximo de Pontryagin y el origen de la teoría, el Cálculo de Variaciones.

La subsección dos parte del estudio de la ecuación de Bellman (Programación Dinámica) para derivar las condiciones necesarias de optimalidad del Principio de Máximo.

El problema inverso, la obtención de la ecuación de Bellman desde el Principio de Máximo de Pontryagin no es posible, ya que el supuesto fundamental de la Programación Dinámica, la diferenciabilidad total de la función integrando F, no está presente entre las hipótesis de Pontryagin. Ello obedece a que, por un lado, cronológicamente aparecen casi al mismo tiempo (1957 la Programación Dinámica, 1962 el Principio de Máximo de Pontryagin), y, por otro, los objetivos de ambos, aunque aplicados a problemas distintos, eran más o menos los mismos: intentar resolver cuestiones que el Cálculo de Variaciones no alcanzaba a explicar satisfactoriamente.

El Capítulo IV constituye el objetivo último de esta tesis: la aplicación de la teoría analizada en los capítulos precedentes a una parcela concreta de la economía española. Específicamente se refiere a la determinación de los precios que maximizan los ingresos de una empresa que actúa en condiciones que pueden considerarse como de monopolio (Tabacalera).

La sección 4.2 se dedica a la estimación de la función de demanda de cigarrillos negros, que es un paso previo para llevar a cabo la aplicación de las técnicas de control óptimo para la resolución del problema.

El apartado 4.3 se ocupa de la aplicación en sí misma del Principio de Máximo. Dentro de esta sección se estudian los distintos elementos que definen la teoría del Principio de Máximo en este caso concreto.

La aplicación práctica se realiza partiendo de dos conjuntos de supuestos diferentes que llevan lógicamente a la obtención de políticas óptimas alternativas. La razón de haber realizado dos ejercicios reside en la necesidad de ofrecer una visión más amplia de este tipo de técnicas en nuestro caso concreto. Por otro lado, y ya que para la realización de los ejercicios se parte obviamente de una serie de hipótesis, restrictivas en mayor o menor medida, parece más lógico intentar obtener una tendencia o dar un cierto margen para los resultados que situarse en la rigidez de unas soluciones únicas.

En el Capítulo 5 se ofrecen, de forma esquemática, las principales conclusiones que se derivan de la investigación, haciendo especial hincapié en los resultados obtenidos en la parte práctica de la misma.

Por último, se incluyen dos anexos, dedicados respectivamente al Cálculo de Variaciones y a la Programación Dinámica.

Por un lado, el Cálculo de Variaciones constituye, como ya se mencionó, el punto de partida de la Teoría del Control Optimo, y el estudio de algunos elementos es fundamental en la derivación de las condiciones necesarias del Principio de Máximo. Por otro, el anexo dedicado a la Programación Dinámica se justifica en base al carácter de método alternativo de solución de determinados problemas de control, como en el caso cuadrático.

El contenido del Anexo A comprende una serie diversa de elementos, desde el planteamiento del problema fundamental del Cálculo de Variaciones, con la determinación de las condiciones necesarias y suficientes, hasta el tratamiento del problema variacional con los distintos tipos de restricciones.

Así, como el Anexo A tiene un carácter general en cuanto que se analiza una serie diversa de elementos dentro del Cálculo de Variaciones, el dedicado a la Programación Dinámica intenta centrarse exclusivamente sobre aspectos fundamentales en el análisis conjunto de ambas técnicas.

El estudio del contenido teórico de este método de optimización parte en nuestro caso de la definición general de Principio de Optimalidad de Bellman para, posteriormente llegar a la derivación de la ecuación diferencial parcial conocida como ecuación de Bellman.

CAPITULO 1

PLANTEAMIENTO GENERAL DEL PRINCIPIO DE MAXIMO DE PONTRYAGIN

1.1. INTRODUCCION

Una gran parte de los modelos físicos o económicos son en general controlables, es decir, pueden ejecutarse de distintas formas dependiendo de la decisión humana. En este Capítulo se estudiará lo que se denomina "Problema de control básico"; en términos intuitivos, y partiendo de dichos modelos controlables, podría formularse este problema de la siguiente forma: (a) supóngase que se fija un objetivo determinado a cumplir por el modelo en concreto en un período de tiempo (por ejemplo: en un modelo económico se propone como objetivo maximizar el bienestar social; en un modelo físico, la minimización de la energía consumida en el proceso que el modelo describe; etc.) que se traduce analíticamente en maximizar lo que se conoce en la terminología del "control óptimo" como funcional objetivo; (b) se plantea entonces el problema de decidir qué tipo de control debe realizar la persona encargada de la toma de decisiones (esto es, qué control elegir en cada momento), para lograr la consecución óptima del objetivo.

En términos matemáticos, el problema parte de un sistema de ecuaciones diferenciales o en diferencias finitas (en nuestro caso, al tomar el tiempo como parámetro contínuo, serán ecuaciones diferenciales) que representa al modelo. Asímismo, se dispone de información sobre el estado del sistema en el tiempo inicial y final, y se conoce la forma del funcional objetivo a optimizar. El problema será elegir un control (o decisión) de entre todos los considerados admisibles (esto es, funciones contínuas a trozos) que maximice el funcional objetivo para las restricciones impuestas por el sistema dinámico y las condiciones de contorno. Ese control considerado óptimo tiene la propiedad de determinar automáticamente la trayectoria del estado del sistema a través del sistema de ecuaciones diferenciales.

A partir de los objetivos descritos, en este capítulo se estudiarán, en primer lugar, los distintos elementos que intervienen en el planteamiento y resolución del problema de control; a continuación se pasa a estudiar el Planteamiento formal del problema; y, por último, la derivación de las condiciones necesarias y suficientes. La inclusión de las condiciones suficientes se justifica porque el Principio del Máximo no garantiza la existencia de un control óptimo; como en el apartado correspondiente veremos, si las funciones que intervienen en el problema formulado son cóncavas, entonces las condiciones necesarias de Pontryagin son suficientes para un control óptimo.

Como epígrafe final del Capítulo se estudia lo que se conoce como "Condiciones extremas variables", que nos aportan para los casos de información parcial sobre los extremos un conjunto de condiciones adicionales que vienen a suplir la falta de información sobre aquéllos.

1.2. EL PROBLEMA BASICO DE CONTROL OPTIMO

1.2.1. Elementos de la moderna teoría del Control

Si la teoría del control óptimo, tal como se señalaba en la introducción general, se basa en las acciones o decisiones que son llevadas a cabo para guiar la conducta temporal de cualquier sistema dinámico que está siendo controlado, nuestra primera etapa en el desarrollo de esta teoría será describir los distintos elementos que intervienen en la misma. Estos elementos son:

1) Un elemento que se desprende de la propia definición de "Teoría del Control": el tiempo. El sistema a controlar puede estar definido en tiempo contínuo o en tiempo discreto (1), dependiendo del fenómeno en estudio. Si es formulado en tiempo contínuo, tal como se hará a lo largo de este trabajo, la variable tiempo "t" se definirá en un intervalo finito $[t_o, t_1]$ tal que

$$t_o \leqslant t \leqslant t_1$$

---

(1) Formulaciones de sistemas de control óptimo en tiempo discreto se pueden encontrar en Chow (1975, 1973), Sethi and Thompson (1981), a nivel teórico, y en Norman (1980) y Fair (1978), entre otros, a nivel de aplicaciones.

2) Nuestro modelo del sistema está completamente descrito en el tiempo por su estado, donde el estado no es más que la posición en un momento dado de una variable vectorial que suele representarse de la forma

$$Y(t) = \left[y_1(t) \;\ldots\ldots\ldots\; y_n(t) \right]'$$

Las funciones $y_i(t)$, $\forall i$, $i=1,2,\ldots,n$, se suponen funciones contínuas con esquinas (1), siendo por tanto las derivadas primeras de las mismas funciones contínuas a trozos.

Puede ocurrir, y es bastante usual, que no todos los valores de las variables estado sean permisibles, esto es, el conjunto de estados permitidos ($\overline{Y}_p$) es un subconjunto arbitrario del espacio euclidiano n dimensional (R^n). En este Capítulo, no obstante, las variables de estado no estarán sometidas a restricciones y, por tanto, el conjunto de estados permitidos $\overline{Y}_p$ coincide con el espacio euclidiano R^n.

---

(1) Con no más de un número finito de esquinas, tal como demuestra Pontryagin (1962).

3) Existirá también un conjunto de "m" variables que guian o controlan a las variables de estado y que, como tales, reciben el nombre de variables de control. Definiremos como un control a alguna función U(t) definida sobre el intervalo $t_o \leqslant t \leqslant t_1$ del tiempo y que toma valores en el espacio control.

Las "m" variables suelen representarse en forma de vector

$$U(t) = \left[u_1(t),\ u_2(t),\ \ldots\ ,\ u_m(t) \right]'$$

donde cada variable de control u_j, $\forall j$, j=1,2,..,m se supone contínua a trozos (1).

Esto es lo mismo que decir que es contínua para todo t, excepto en un número finito de instantes donde la función de control puede tener discontinuidades de primera clase en términos de

(1) Un tratamiento más detallado sobre los requisitos de continuidad de estas funciones se encuentra en Pontryagin (1958).

Pontryagin (1). Esta será la única restricción que sobre las funciones control se impondrá a lo largo de este Capítulo.

En la mayoría de las aplicaciones del control óptimo las variables de control están sometidas a restricciones, esto es, no pueden tomar valores arbitrarios. Esto supondrá que, para cada t, $U(t) \in \overline{U}_p$, donde por $\overline{U}_p$ designamos un conjunto de controles permitidos, que es algún subconjunto del espacio euclidiano R^m.

En términos estrictos, el control en un sistema dinámico trata de manejar las variables controlables del mismo para inducir al sistema a comportarse de una manera deseable. En este sentido cabe analizar la diferencia que existe entre el llamado control open-loop y el denominado control closed-loop (feedback).

El control open-loop es aquél en que la función de control U(t) se genera por algún proceso externo al sistema en sí mismo, y posteriormente esta función se aplica al sistema sin tener en

---

(1) Pontryagin (1962), pág. 73

cuenta la evolución resultante del sistema. Esta especificación exógena de la función de control se hace en el tiempo inicial.

El control closed-loop o control feedback se caracteriza porque la función de control viene determinada por la variable de estado en cada instante. Este tipo de control presenta claras ventajas sobre el primero, ya que permite revisar las decisiones en cada momento del tiempo a la luz de las nuevas informaciones (1).

No obstante, y a efectos de nuestro estudio, la distinción entre los dos tipos de control es irrelevante, ya que autores como Chow (1973), Luenberger (1975) y Bensoussan (1974) entre otros demuestran que si el sistema dinámico es determinístico (supuesto implícito a lo largo de nuestro trabajo) los dos tipos de control son equivalentes.

---

(1) El hecho de que el control closed-loop o feedback puede ajustarse rápidamente a variaciones imprevistas del sistema se manifiesta en la capacidad que tiene para aumentar la estabilidad del sistema. Véase, en este sentido, Luenberger (1975).

4) Supondremos que la evolución temporal de las variables de estado viene descrita por n ecuaciones diferenciales ordinarias, denominadas ecuaciones de transición o simplemente sistema dinámico, que suele expresarse como

$$\dot{y}_1 = g_1(Y, U, t)$$

$$\dot{y}_2 = g_2(Y, U, t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{y}_n = g_n(Y, U, t)$$

o, en forma vectorial,

$$\dot{Y} = G(t, Y, U)$$

Cada función g_i, $\forall i$ / $i=1,2,\ldots,n$ se supone contínua con primeras derivadas (parciales) también contínuas sobre algún subconjunto de puntos (t, Y, U) en R^{n+m+1}.

5) Por último, debemos definir la función objetivo como un instrumento básico para evaluar o medir la efectividad de un control. Esta función recoge de forma esquemática y aproximada las preferencias y/o fines de la persona o ente encargado de llevar a cabo el control del proceso (1).

La función objetivo que será utilizada en la mayor parte de nuestro trabajo responde a la forma (2) :

$$I(Y, U) = \int_{t_2}^{t_1} F(Y, U, t)\, dt$$

---

(1) Así, si el problema de control se centra en un modelo de crecimiento óptimo, el funcional objetivo será la utilidad total, tal como puede verse en Arrow (1968). En este sentido, en nuestro modelo empírico veremos cómo este funcional objetivo recoge los Ingresos totales de Tabacalera durante el período considerado.

(2) Existen otras formas de función objetivo, tal como puede verse en Hadley-Kemp (1971).

donde F(...) tiene primeras derivadas contínuas (1).

---

(1) Esta es una ventaja importante de la moderna teoría del control óptimo respecto al Cálculo de Variaciones. Ya que F en el cálculo variacional ha de tener primeras y segundas derivadas contínuas, tal como puede verse en el Anexo A.

1.2.2. Planteamiento formal del problema

Hemos visto en la sección precedente y de forma muy sintética los componentes básicos de la Moderna Teoría del Control:

- Por un lado, una serie de elementos que se utilizan en la misma: las variables de estado y control, el sistema dinámico, el tiempo y la función objetivo.
- Y, por otro, el objeto de dicha teoría: optimizar (maximizar o minimizar) la función objetivo.

En base a estos componentes, podemos llegar a plantear el problema básico de la teoría del control en los siguientes términos:

- Dado un sistema dinámico (lineal o no lineal) formulado en tiempo contínuo para el que las funciones de control pueden ser especificadas, el problema será seleccionar una función de control que optimice el funcional objetivo determinando simultáneamente la trayectoria de la variable de estado óptimo correspondiente a esa función de control considerada óptima.

En términos analíticos, equivaldría a lo siguiente:

i) Dadas las condiciones siguientes:

$$Y(t_o) = Y_o \tag{1.1}$$

$$Y(t_1) = Y_1 \tag{1.2}$$

$$\dot{Y} = G(t, Y, U) \tag{1.3}$$

$$U(t) \in \bar{U}_p \equiv R^m \tag{1.4}$$

$$Y(t) \in \bar{Y}_p \equiv R^n \tag{1.5}$$

Donde: (1.1) y (1.2) son las condiciones extremas que supondremos datos del problema; el sistema (1.3) es el conjunto de las n ecuaciones de movimiento que expresan la dinámica de las variables de estado; las condiciones (1.4) y (1.5) indican que las variables control y estado no están sometidas a restricciones (esto es, $\bar{U}_p$ e $\bar{Y}_p$ coinciden con R^m y R^n respectivamente).

ii) Maximizar (1) el funcional objetivo siguiente:

$$I(Y,\ U) = \int_{t_o}^{t_1} F(Y,\ U,\ t)\ dt \qquad (1.6)$$

Una vez especificado el objetivo y las condiciones, pasamos a resolver el problema formulado. El procedimiento a seguir se centra en determinar la incógnita, una función vectorial U(t) que, una vez especificada, determina en el sistema de ecuaciones de transición una trayectoria de estado única. Esta trayectoria y el vector de control hallado determinan un valor del funcional objetivo. Luego el problema es hallar esa función U(t) que maximice el funcional (1.6).

Como todo problema de optimización con restricciones, su resolución pasa por determinar un conjunto de condiciones necesarias que la solución óptima debe satisfacer. En este sentido, nuestro primer paso será

---

(1) Con el término maximizar se recogen tanto los problemas de maximización como de minimización, ya que minimizar (1.6) es equivalente a maximizar $-I(Y,\ U)$.

obtener ese conjunto de condiciones necesarias (1) que un problema como el formulado de (1.1) a (1.6) debe satisfacer.

---

(1) Una revisión conjunta de las condiciones necesarias del Problema de control puede verse en Clarke (1976).

1.2.3. Condiciones necesarias

Tal como se desprende del problema planteado, hay diversidad de instrumentos matemáticos asociados al control óptimo. Y, en este sentido, las condiciones necesarias pueden ser derivadas utilizando diferentes procedimientos matemáticos, entre los cuales la ecuación de Euler-Lagrange del Cálculo de Variaciones (1) y la primera diferencia de la función objetivo (2) constituyen los más utilizados. El procedimiento utilizado por nosotros será este último.

Tal como se encuentra en cualquier texto de optimización, el problema de maximizar o minimizar localmente se deriva del hecho de considerar pequeñas variaciones del punto óptimo. Aplicando esta idea al problema de control óptimo, se puede estudiar el efecto que esa variación de la función de control introduce en la variable de estado a través del sistema dinámico. Para ello construimos una función objetivo am-

---

(1) Esta es la vía utilizada por Miller (1979) para obtener las condiciones necesarias.

(2) Luenberger (1975) y Bensoussan (1974), entre otros, siguen este segundo procedimiento.

pliada que considere las restricciones impuestas por las ecuaciones de transición.

Con este fin definimos el vector de n variables

$$\Lambda(t) = \lambda_1(t),\ \lambda_2(t),\ \ldots,\ \lambda_n(t)$$

denominadas variables auxiliares (1), una por cada una de las ecuaciones del sistema. Estas funciones auxiliares se suponen no nulas y contínuas en el tiempo con primeras derivadas contínuas excepto en un número finito de puntos (2).

Por tanto, la función objetivo ampliada tendrá la estructura siguiente:

$$I^{*} = I(Y,U) - \int_{t_0}^{t_1} \Lambda(t)\left[\dot{Y} - G(t,Y,U)\right] dt \quad (1.7)$$

Sustituyendo en (1.7) el valor de (1.6), tendremos:

$$I^{*} = \int_{t_0}^{t_1} \left[F(t,Y,U) - \Lambda(t)\left[\dot{Y} - G(t,Y,U)\right]\right] dt \quad (1.8)$$

---

(1) Estas variables también son conocidas como variables adjuntas o de coestado.

(2) Véase Hestenes (1966).

Con esta nueva función objetivo, el problema ahora se reduce a determinar esa función de control que optimice el funcional (1.8), utilizando para ello la flexibilidad en la elección de las variables auxiliares.

Supongamos que U(t) es el control óptimo. Por analogía con el Cálculo de Variaciones clásico, una variación muy pequeña en esa función control óptima repercutirá en la función objetivo ampliada (1.8). Pero antes de pasar a estudiar el cambio producido en (1.8) definamos por conveniencia la función Hamiltoniana siguiente:

$$H(t, Y, U, \Lambda) = F(t, Y, U) + \Lambda(t).G(t, Y, U) \qquad (1.9)$$

que debe ser contínua respecto a la variable tiempo si H depende explícitamente de t (1).

---

(1) Si la función Hamiltoniana no depende explícitamente de t, esto es, si el sistema dinámico es autónomo, la función H será una constante a lo largo de la trayectoria óptima, ya que la derivada parcial de H respecto a t será cero. Para una descripción más detallada de la variación temporal de H, véase apartado 3.3.

Utilizando (1.9), la expresión (1.8) se transforma en:

$$I^{*} = \int_{t_o}^{t_1} \left[H(t,\ Y,\ U,\ \Lambda) - \Lambda(t).\dot{Y}\right] dt \tag{1.10}$$

Integrando por partes el segundo término bajo el signo integral de (1.10)

$$\int_{t_o}^{t_1} \Lambda(t).\dot{Y}\ dt = \Lambda(t_1).Y(t_1) - \Lambda(t_o).Y(t_o) - \int_{t_o}^{t_1} \dot{\Lambda}\ .\ Y\ dt \tag{1.11}$$

Llevando (1.11) a (1.10), tendremos:

$$I^{*} = \int_{t_o}^{t_1} \left[H(t,Y,U,\Lambda) + \dot{\Lambda}(t)Y(t)\right] dt - \left[\Lambda(t_1)Y(t_1) - \Lambda(t_o)Y(t_o)\right] \tag{1.12}$$

Supongamos, tal como hemos señalado anteriormente, que se produce un cambio infinitesimal en la trayectoria control óptimo, resultado del cual tendremos un nuevo control $U(t) + \delta\ U(t)$ (considerado admisible desde el punto de vista de continuidad) y donde $\delta U(t)$ expresa una porción muy pequeña de $U(t)$, $\forall t \in [t_o\ t_1]$. Esta pequeña variación en el control conducirá a un cambio en la trayectoria de la variable de estado, que pasará a ser $Y(t) + \delta Y(t)$, siendo $\delta Y(t)$ infinitamente pequeño $\forall t \in [t_o, t_1]$.

La variación del funcional objetivo (1.12) inducida por la nueva función control sería:

$$\Delta I^{*} = \int_{t_o}^{t_1} \left[H[t,\ Y+\delta Y(t),\ U+\delta U,\ \Lambda] - H(t,\ Y,\ U,\ \Lambda) \right] dt -$$

$$- \int_{t_o}^{t_1} \left[\Lambda(t)\ |\dot{Y} + \delta\dot{Y}| - \Lambda(t).\dot{Y} \right] dt \qquad (1.13)$$

Como $\Lambda\dot{Y}$ con signo positivo y negativo se anulan, del término derecho de (1.13) quedará:

$$\Delta I^{*} = \int_{t_o}^{t_1} H(t,\ Y+\delta Y,\ U+\delta U,\ \Lambda) - H(t,\ Y,\ U,\ \Lambda)\ \ dt -$$

$$- \int_{t_o}^{t_1} \Lambda.\dot{Y}\ dt \qquad (1.14)$$

Si en (1.14) sustituimos la segunda integral del lado derecho por su valor calculado en (1.11), tendremos:

$$\Delta I^{*} = \int_{t_o}^{t_1} \left[H(t,\ Y+\delta Y,\ U+\delta U,\ \Lambda) - H(t,\ Y,\ U,\ \Lambda) \right] dt +$$

$$+ \int_{t_o}^{t_1} \dot{\Lambda}\ Y\ dt - \left[\Lambda(t_1)\,\delta\ Y(t_1) - \Lambda(t_o)\,\delta\ Y(t_o) \right] =$$

$$= \int_{t_o}^{t_1} \left[H(t,\ Y+\delta Y,\ U+\delta U,\ \Lambda) - H(t,Y,\ U,\Lambda) + \dot{\Lambda}\ Y \right] dt -$$

$$- \left[\Lambda(t_1)\ \delta Y(t_1) - \Lambda(t_o)\ \delta Y(t_o) \right] \qquad (1.15)$$

Como el $\Delta \simeq \delta$ (esto es, el incremento es aproximadamente la diferencial o variación, tanto en funciones como en funcionales, para incrementos suficientemente pequeños de las variables (1)), la expresión (1.15) quedaría:

---

(1) Véase Anexo A

$$\delta I^{*} = \int_{t_o}^{t_1} \left[H_Y \cdot \delta Y + H_U \ \delta U + \dot{\Lambda} \ \delta Y \right] dt -$$

$$- \left[\Lambda(t_1) \ \delta Y(t_1) - \Lambda(t_o) \ \delta Y(t_o) \right] \qquad (1.16)$$

Dado que hemos supuesto condiciones de contor no fijadas, en (1.16) el último corchete será cero, y así, queda que la variación del funcional I^{*} (δI^{*}) es igual a:

$$I^{*} = \int_{t_o}^{t_1} \left[\left[H_Y + \dot{\Lambda} \right] \ \delta Y \right] dt + \int_{t_o}^{t_1} \left[H_U \cdot \delta U \right] dt \qquad (1.17)$$

Una condición necesaria para que el funcional I^{*} tenga un extremo para $Y = Y(t)$ y $U = U(t)$ es que la variación sea cero, lo que exige, ya que (1.17) debe satisfacerse, que para cualquier δU admisible

$$\dot{\Lambda} = - H_Y \qquad (1.18)$$

$$H_U = 0 \qquad (1.19)$$

La condición necesaria (1.19) expresa que la función Hamiltoniana se maximiza mediante la elección de variables de control en cada t a lo largo de la trayectoria óptima. Esta condición es la de un máximo interior, puesto que hemos supuesto que no había restricciones sobre los valores que toman las variables de control. La condición (1.19) puede expresarse de una forma más general de manera que recoja los casos de restricciones sobre las variables de control como:

$$H(t, Y, U+\delta U, \Lambda) \geqslant H(t, Y, U, \Lambda)$$

$$\forall U+\delta U \in \overline{U}_p \qquad (1.20)$$

o bien,

$$\max_{\{U \in \overline{U}_p\}} H(\Lambda, Y, U, t) = \mathcal{H}(t, Y, \Lambda) \qquad (1.20')$$

donde (1.20) ó (1.20') son las propiedades que justifican el nombre de "Principio del Máximo".

Por tanto, para que δI^* sea cero, lo que equivale a decir que el control propuesto U(t) es óptimo, ha de satisfacerse que:

$$\dot{Y} = H_\Lambda \qquad (1.21)$$

$$-\dot{\Lambda} = H_Y \qquad (1.22)$$

$$H(t, Y, U+\delta U, \Lambda) \geqslant H(t, Y, U, \Lambda) \qquad (1.23)$$

donde las dos primeras condiciones necesarias son dos sistemas de n ecuaciones cada una, que expresan la dinámica de las variables de estado y auxiliares respectivamente. Este par de sistemas más el sistema de ecuaciones estáticas (1.23) nos arroja las soluciones o trayectorias temporales óptimas de las variables respectivas.

El tercer sistema de ecuaciones (1.23) expresa que en cada t, $t_o \leqslant t \leqslant t_1$, para los valores óptimos de $\Lambda(t)$ e $Y(t)$ calculados en (1.20) y (1.21), el valor particular U(t) en la Teoría de control óptimo tiene la propiedad de optimizar en cada instante t la función Hamiltoniana H.

Resumiendo los resultados obtenidos hasta aquí, tenemos:

- En el problema planteado buscábamos unas funciones control y estado que cumplieran las condiciones dadas por (1.1) a (1.5) mientras maximizaban el funcional objetivo (1.6). Las condiciones necesarias obtenidas en (1.21), (1.22) y (1.23) sirven como pruebas que han de ser satisfechas por las funciones U(t) e Y(t) si son óptimas.

  Nótese que las condiciones derivadas, como cualquier conjunto de condiciones necesarias, no garantizan la existencia de un control óptimo $U(t)$; ellas son solamente las condiciones que están implicadas por la optimalidad, suponiendo la existencia de un control óptimo $U(t)$.

- Las condiciones obtenidas para este problema pueden ser recogidas en el siguiente teorema:

TEOREMA:

Supongamos que $U(t)$ es el control óptimo y sea $Y(t)$ la trayectoria estado correspondiente (según 1.21) con las condiciones iniciales

$$Y(t_o) = Y_o$$

$$Y(t_1) = Y_1$$

Una condición necesaria para que el control $U(t)$ y la trayectoria estado $Y(t)$ sean óptimos es que exista una función vector $\Lambda(t)$ contínua y no nula correspondiente a $U(t)$ e $Y(t)$ (dada por 1.22) tal que:

para todo $t \,/\, t_o \leq t \leq t_1$,

la función $H(t, Y(t), \Lambda(t), U)$ de la variable $U \in \overline{U}_p$ alcance un máximo en $U = U(t)$, esto es,

$$H(\Lambda(t), Y(t), U(t), t) = \mathcal{M}(\Lambda(t), Y(t), t),$$

$$\forall t \,/\, t \in [t_o \;\; t_1]$$

donde

$$\mathcal{M}(\Lambda(t), Y(t)) = \max_{U \in \overline{U}_p} H(\Lambda(t), Y(t), U, t)$$

y que cumpla las condiciones (1.21) y (1.22).

- Por último, añadir que el conjunto de condiciones necesarias [(1.21), (1.22) y (1.23)] es completo en el sentido de que hay tantas ecuaciones como incógnitas. Las incógnitas U(t), Y(t) y Λ(t) son 2n m funciones. Las ecuaciones son 2n ecuaciones diferenciales (n de (1.21) y n de (1.22)) y m ecuaciones del Principio del máximo (sistema (1.23)). Además, es completo desde el punto de vista de las ecuaciones de contorno.

1.3. CONDICIONES EXTREMAS VARIABLES

El Principio del Máximo y el resto de condiciones necesarias se han derivado bajo el supuesto de condiciones extremas fijas; esto es, tanto los valores iniciales como los finales del vector estado estaban previamente especificados.

Puede suceder, tal como se analiza en la teoría clásica variacional (1) que la información suministrada por la condición extrema final $[Y(t_1) = Y_1]$ o la correspondiente a la inicial $[Y(t_o) = Y_o]$ no estén disponibles; o bien que en su lugar sea conocida cierta relación entre el estado y el tiempo, como por ejemplo que la función óptima $Y(t)$ sea en t_1 y/o en t_o un punto sobre una determinada variedad. En este último caso, los parámetros t_1, t_o, Y_1, Y_o pueden no especificarse, con lo que sólo se conocería que (Y_o, t_o) e (Y_1, t_1) deben pertenecer a unas determinadas variedades $\mathcal{M}_A$ y $\mathcal{M}_B$ (2).

---

(1) Véase Apéndice A: Transversalidad

(2) Definidas al igual que en el Anexo A como intersección de K_o y K_1 hipersuperficies.

Para las situaciones de condiciones extremas variables, descritas más arriba, puede deducirse (siguiendo el razonamiento expuesto en el Anexo A para el Cálculo de Variaciones) un conjunto de condiciones adicionales que se derivan de la transversalidad y que vienen a suplir la falta de información que sobre los extremos inicial y final del vector de estado pue de presentarse.

En este sentido, nuestro interés en el aparta do que nos ocupa será obtener un conjunto de condicio nes adicionales, de forma similar a lo que se hace en Cálculo de Variaciones. La única variante estará en que sólo nos centraremos en el extremo final, que corresponde al caso más común en las aplicaciones del control óptimo a la realidad. Por otro lado, los resultados obtenidos para un extremo son perfectamente aplicables al caso en que la información ausente sea la del otro o la de ambos. En otras palabras, reduciremos nuestro análisis al caso de extremo inicial dado y extremo final desconocido parcial o totalmente (1).

---

(1) Siguiendo a Hadley-Kemp (1971).

Las situaciones o casos posibles apuntados antes podemos clasificarlos en:

A) Puntos finales fijados.-

En este caso, tanto el estado final (Y_1) como el tiempo terminal (t_1) están previamente especificados o, lo que es lo mismo, hay información total sobre el extremo final de la trayectoria estado.

La condición de transversalidad para esta situación no añadiría condicionamientos adicionales sobre el vector

$$\begin{bmatrix} H \\ -\Lambda(t) \end{bmatrix} \qquad (1.24)$$

vector que explicaremos más adelante.

El caso al que nos estamos refiriendo se corresponde con el problema de control planteado en la sección 2.1, donde teníamos que, para unas condiciones extremas fijadas

$$\begin{aligned} Y(t_o) &= Y_o \\ Y(t_1) &= Y_1 \end{aligned} \qquad (1.25)$$

había que determinar las funciones control y estado que maximizaban el funcional

$$I(Y, U) = \int_{t_o}^{t_1} F(t, Y, U)\, dt \qquad (1.26)$$

mientras se satisface el sistema dinámico

$$\dot{Y} = G(t, Y, U) \qquad (1.27)$$

La resolución del problema nos llevaba a formar una función objetivo ampliada, I^*, que definíamos como

$$I^* = \int_{t_o}^{t_1} \left[F(t, Y, U) + \Lambda(G - \dot{Y})\right] dt \qquad (1.28)$$

Si llamamos al integrando de I^* una función L,

$$L = F(t, Y, U) + \Lambda G - \Lambda \dot{Y} \qquad (1.29)$$

e introducimos la función Hamiltoniana H definida en (1.9), tendremos que (1.29) puede reescribirse como

$$L = H(t, Y, U, \Lambda) - \Lambda.\dot{Y} \qquad (1.30)$$

Por similitud con el Cálculo de Variaciones, lo que allí denominamos ∇I aquí se convierte en ∇I^{*}; esto es,

$$\begin{bmatrix} L - L_{\dot{Y}} \cdot \dot{Y} \\ \\ L_{\dot{Y}} \end{bmatrix} \qquad (1.31)$$

Sustituyendo los valores de L y $L_{\dot{Y}}$ en (1.31), ésta se transforma en el vector

$$\begin{bmatrix} H \\ -\Lambda(t) \end{bmatrix}$$

que coincide con el vector introducido en (1.24). Resumiendo, tendremos que el planteamiento de la condición de transversalidad para el caso A) se reduce a que

$$\begin{bmatrix} H \\ \\ -\Lambda(t) \end{bmatrix}_{t=t_1} \cdot \begin{bmatrix} \delta t_1 \\ \\ \delta Y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1.32)$$

Como $t_1 = Y_1 = 0$, puesto que hemos supuesto condiciones extremas fijadas, H y $\Lambda(t_1)$ en $t = t_1$ no se ven sometidos a restricciones adicionales.

B) Estado final libre.-

Supongamos que el tiempo final (t_1) está fijado, pero el estado final (Y_1) es libre, es decir, cualquier variación del tiempo final (δt_1) es cero, pero δY_1 puede ser distinta de cero. Según la expresión de la condición de transversalidad dada en (1.32),

$$\begin{bmatrix} H \\ -\Lambda(t) \end{bmatrix}_{t=t_1} \cdot \begin{bmatrix} \delta t_1 \\ \delta Y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y ya que

$$\delta t_1 = 0 \qquad \text{y}$$

$$\delta Y_1 \neq 0$$

entonces, no habrá restricción adicional sobre la función Hamiltoniana en el tiempo final (1).

Ahora bien, dado que δY_1 es distinto de cero, entonces, para satisfacer la condición de ortogonalidad, $-\Lambda(t)$ ha de ser cero en el tiempo final t_1.

---

(1) Este supuesto será utilizado como elemento importante en nuestro modelo empírico del Capítulo 4.

Por tanto, para el caso de estado final libre, la condición de transversalidad añade al problema de control "n" restricciones adicionales sobre el vector de variables auxiliares, que se traducen en

$$- \Lambda(t) \Big|_{t=t_1} = 0 \tag{1.33}$$

En este caso, el par de sistemas de ecuaciones diferenciales del conjunto de condiciones necesarias

$$- H_Y = \dot{\Lambda}$$

$$H_{\Lambda} = \dot{Y}$$

tienen como condición inicial $Y(t_o) = Y_o$, y como valor terminal la restricción adicional derivada de la condición de transversalidad, es decir, $\Lambda(t_1) = 0$. Por tanto, ambos sistemas se resolverían teniendo en cuenta los parámetros siguientes

$$t_o \ , \ Y(t_o) \ , \ t_1 \ \text{y} \ \ \Lambda(t_1)$$

C) Tiempo terminal libre.-

Este caso es el inverso de B), ya que el estado final Y_1 está especificado, y por tanto cualquier variación del mismo es cero, $\delta Y_1=0$; pero el tiempo final (t_1) es libre y por tanto $\delta t_1 \neq 0$.

En esta situación, el requerimiento de transversalidad no impone restricciones adicionales sobre el vector de variables auxiliares en el tiempo final $\Lambda(t_1)$, pero sí sobre el valor del Hamiltonia no particularizado en el tiempo terminal $H(t_1)$, que habrá de ser cero según la expresión (1.32), esto es:

$$H(t_1, \Lambda(t_1), Y(t_1), U(t_1)) = 0 \qquad (1.34)$$

Esta misma condición adicional puede derivarse del problema de control formulado de forma más sencilla (1) si suponemos que t_1 es una variable más a determinar en el problema de optimización. Así, si tenemos que:

i) Dadas las condiciones:

$$Y(t_o) = Y_o$$

$$Y_1$$

$$\dot{Y} = G(t, Y, U)$$

(1) Véase Luenberger (1975)

$$ii) \ \text{Max } I^{*}(t_1, Y, U) = \int_{t_o}^{t_1} \Big[F(t,Y,U) - \Lambda(t)\left[\dot{Y} - G(t,Y,U)\right]\Big] dt$$

para que el tiempo terminal pueda determinarse, hemos de maximizar la función objetivo modificada I^{*} respecto a t_1, lo que equivale a

$$\frac{\partial I^{*}}{\partial t_1} = 0$$

Como la incógnita a determinar (t_1) sólo aparece en el límite superior de la integral, tendremos que

$$\frac{\partial I^{*}}{\partial t_1} = H\left[t_1,\ \Lambda(t_1),\ Y(t_1),\ U(t_1)\right] = 0 \qquad (1.35)$$

que, como puede comprobarse, es idéntica a la condición adicional derivada siguiendo el principio de transversalidad.

D) Variedad terminal fijada.-

Como último caso, vamos a estudiar la situación en que la información disponible sobre el extremo final de la trayectoria óptima es que (t_1, Y_1)

pertenezca a una determinada variedad regular $\mathcal{M}_B$ (1) definida como la intersección de las k hipersuperficies siguientes:

$$\begin{aligned} S_1\ (t, y_1, \ldots, y_n) &= 0 \\ S_2\ (t, y_1, \ldots, y_n) &= 0 \\ &\vdots \\ S_k\ (t, y_1, \ldots, y_n) &= 0 \end{aligned} \qquad (1.36)$$

siendo $k < n$ y siendo por tanto la dimensión de $\mathcal{M}_B$ $(n - k + 1)$ (que podemos llamar K_2).

En otras palabras, en esta situación se trata de determinar la función control óptimo U(t) que conduzca el sistema desde algún punto previamente especificado (t_o, Y_o) a algún punto $(t_1, Y_1) \in \mathcal{M}_B$ (perteneciente a una determinada variedad alisada

---

(1) Una variedad $\mathcal{M}_B$ se llama regular si en cada punto $(t\ Y) \in \mathcal{M}_B$, los vectores

$$\nabla S_1(t\ Y) \ \ldots\ldots \ \nabla S_k(t\ Y)$$

son linealmente independientes. Véase Pontryagin (1962).

$\mathcal{M}_B$ de dimensión $K_1 < n$) que hace máximo el funcional objetivo del problema.

Cuando el extremo final $(t_1\ Y_1)$ es libre, para la determinación de las soluciones al sistema de 2n+m ecuaciones necesitamos de condiciones adicionales sobre este límite. Al no estar estas condiciones entre los datos del problema, hemos de acudir a condiciones adicionales que, derivadas desde lo que se conoce como condiciones de transversalidad, cubran la laguna de información sobre las condiciones de contorno.

La derivación de estas condiciones se hará de forma análoga a lo hecho en el Anexo A. Esto justifica el tratamiento somero que sobre esta situación haremos en el punto que nos ocupa.

Como el gradiente de una hipersuperficie en un punto es un vector ortogonal a la misma en ese punto, la condición de transversalidad para el caso presente respondería a la forma:

$$\nabla I^{*}(t_1\ Y_1) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\ \nabla S^i(t_1\ Y_1) \tag{1.37}$$

que expresa que los vectores ∇I^{*} y ∇S^i son colineales. Desarrollando la expresión (1.37) en términos de (1.32), tendremos:

$$\begin{bmatrix} H \\ \\ -\Lambda(t_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla S_1 \\ \vdots \\ \nabla S_k \end{bmatrix}$$

$$= \alpha_1 \nabla S_1(t_1\ Y_1) + \alpha_2 \nabla S_2(t_1\ Y_1) + ..\ \alpha_k S_k(t_1\ Y_1) \tag{1.38}$$

Si la información sobre el extremo final fuera que Y_1 descanse sobre una variedad regular $\mathfrak{M}_B$ conocida la restricción $t - t_1 = 0$, en este caso la variedad $\mathfrak{M}_B(t_1)$ sería la intersección de k hipersuperficies

$$\begin{aligned} S_1\ (t_1\ ,\ Y) &= 0 \\ &\vdots \\ S_k\ (t_1\ ,\ Y) &= 0 \end{aligned} \tag{1.39}$$

donde el conjunto de puntos $(t_1, Y) \in \mathfrak{M}_B(t_1)$ representa la intersección de $\mathfrak{M}_B$ con el hiperplano $t = t_1$. Aquí la condición de transversalidad se traduciría en que

$$\Lambda(t_1) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \nabla S^i(Y_1) \tag{1.40}$$

La ecuación (1.40) puede expresarse en otros términos; por el álgebra lineal se sabe que para cada variedad regular $\mathcal{M}_{B.1}$ definida por (1.39) es posible determinar un conjunto de K_2 vectores linealmente independientes (n dimensionales) tangentes a $\mathcal{M}_{B.1}$, $\theta_1, \dots \theta_{K_2}$ que conducirá a K_2 condiciones adicionales. Así, si la dimensión de $\mathcal{M}_{B.1}$ es K_2 (n-k) buscaremos esos K_2 vectores paralelos a la variedad tangente T_1 y linealmente independientes, $V_1, \dots, V_{K_2}$, que darán lugar a las K_2 condiciones

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)\, V_j^i \Big|_{t=t_1} = 0 \qquad \forall j = 1,\dots,K_2 \quad (1.41)$$

que, unido a las $n-K_2$ que debe satisfacer el extremo final por pertenecer a $\mathcal{M}_{B.1}$, nos dan el conjunto de condiciones adicionales o de transversalidad sobre Y_1.(1).

---

(1) Para un estudio gráfico de estas condiciones puede acudirse a Smith (1974).

El estudio de esta sección 1.3. nos ha puesto de manifiesto cómo el conjunto de condiciones necesarias de Principio de Máximo junto a las condiciones adicionales derivadas de la transversalidad dan un conjunto de condiciones necesarias de optimalidad para problemas de extremo final variable.(1).

---

(1) Es preciso recordar que aunque nuestro estudio de extremos variables se ha basado en el extremo final, los mismos razonamientos se seguirán para el inicial. En este sentido, Pontryagin deriva las condiciones de transversalidad para Y_o e Y_1 pertenecientes a variedades S_o y S_1 simultáneamente.

1.4. LA SUFICIENCIA

Todos los elementos estudiados en las secciones previas de este Capítulo están relacionados con las condiciones necesarias que la trayectoria óptima de un funcional objetivo debe satisfacer. El paso siguiente sería preguntarse bajo qué supuestos las condiciones necesarias analizadas en la moderna teoría del control son suficientes.

Ya en el Anexo sobre Cálculo de Variaciones se observa que las condiciones necesarias son suficientes si la función integrando del funcional objetivo es cóncava en las variables (Y, Y'). Siguiendo idénticos razonamientos a los empleados en el anexo citado, podemos adelantar para la Moderna Teoría del Control, o Principio del Máximo, que si las funciones que intervienen en el Problema de control son cóncavas en las variables estado y control, respectivamente, las condiciones necesarias (1.20), (1.21) y (1.22) son suficientes para un máximo global.

El estudio de la Suficiencia lo haremos siguiendo básicamente el método de Mangasarian y Seierstad (1).

---

(1) Parece necesario resaltar la gran importancia de estos autores en el estudio de las condiciones suficientes de optimalidad, fundamentalmente el primero en su artículo de 1966 y el segundo en el artículo de 1977.

La demostración que a continuación vamos a hacer de las condiciones suficientes de optimalidad se llevará a cabo para un problema de control general, en lugar de derivarlas para un problema elemental como el que hemos visto páginas atrás. Esto obedece a que, por un lado, siempre es posible a partir del caso general obtener condiciones específicas para el caso particular y, por otro, a que las restricciones nuevas que en el caso general aparecen corresponden a las que más tarde estudiaremos en el Capítulo II de este trabajo.

Consideremos el siguiente problema de control óptimo:

Dado un tiempo inicial t_o y un tiempo final t_1, encontrar las funciones vector U(t) e Y(t) que maximicen el funcional

$$I(Y, U) = \int_{t_o}^{t_1} F(t,Y(t),U(t))\,dt + \phi\left[Y(t_o),\, Y(t_1)\right] \tag{1.42}$$

sujeto a las restricciones:

$$\dot{Y} = G(t, Y, U) \tag{1.43}$$

$$R(t, Y, U) \leqslant 0 \tag{1.44}$$

con el estado inicial y terminal no especificados que han de satisfacer:

$$P(Y(t_o)) \leqslant 0 \qquad (1.45)$$

$$Q(Y(t_1)) \leqslant 0 \qquad (1.46)$$

Vamos a estudiar para este problema general las condiciones suficientes de optimalidad. Estas condiciones serán alcanzadas introduciendo los multiplicadores de Lagrange Λ , W , r, S para los sistemas (1.43) a (1.46) respectivamente, añadiendo estas relaciones con sus multiplicadores al funcional (1.42) y entonces imponiendo condiciones del tipo Khun-Tucker para obtener las siguientes condiciones suficientes de optimalidad.

TEOREMA

Sean $F(t, Y, U)$, $G(t, Y, U)$ y $R(t, Y, U)$ funciones diferenciables y cóncavas en las variables (Y,U) $\forall t \in [t_o, t_1]$. Del mismo modo, sean $P(Y(t_o))$ y $Q(Y(t_1))$ funciones diferenciables y cóncavas en los argumentos $Y(t_o)$ e $Y(t_1)$ respectivamente, y sea $\phi(Y(t_o), Y(t_1))$ diferenciable y cóncava en $[Y(t_o), Y(t_1)]$. Si existen los vectores U^*, Y^*, Λ^*, W^*, r^* y S^* que satisfacen las relaciones (1.43) a (1.46), con $Y^*(t)$ y $\Lambda^*(t)$

continuas y $W^*(t)$ continua a saltos, tal que:

$$F_Y(t,Y^*,U^*) + {}^{*}G_Y(t,Y^*,U^*) + W^*R_Y(t,Y^*,U^*) + \dot{\Lambda}^* = 0 \tag{1.47}$$

$$F_U(t,Y^*,U^*) + \Lambda^*G_U(t,Y^*,U^*) + W^*R_U(t,Y^*,U^*) = 0 \tag{1.48}$$

$$\phi_{Y(t_o)}\left[Y^*(t_o),Y^*(t_1)\right] + r^*P_{Y(t_o)}\left[Y^*(t_o)\right] + \Lambda^*(t_o) = 0 \tag{1.49}$$

$$\phi_{Y(t_1)}\left[Y^*(t_o),Y^*(t_1)\right] + s^*Q_{Y(t_1)}\left[Y^*(t_1)\right] - \Lambda^*(t_1) = 0 \tag{1.50}$$

Además, la existencia de restricciones de desigualdad exige, vía las condiciones de Khun-Tucker, que:

$$r^* \geqslant 0 \tag{1.51}$$

$$r^*.p\left[Y(t_o)\right] = 0 \tag{1.52}$$

$$s^* \geqslant 0 \tag{1.53}$$

$$s^*.Q\left[Y(t_1)\right] = 0 \tag{1.54}$$

$$W^* \geqslant 0 \tag{1.55}$$

$$W^*.R(t, Y^*, U^*) = 0 \tag{1.56}$$

Si la función G(t, Y, U) fuera no lineal en alguna o algunas de las variables Y ó U, entonces el requisito de concavidad implicaría que

$$\Lambda^{*}(t) \geqslant 0 \qquad (1.57)$$

El conjunto de condiciones (1.47) y (1.48) son las equivalentes a (1.21) y (1.23) de la sección 1.2, salvo la existencia de términos adicionales que recogen la presencia de restricciones en las variables Y y U.

Las condiciones (1.49) y (1.50) son las derivadas parciales de la función auxiliar implícita en la deducción de estas condiciones respecto al estado inicial y terminal como incógnitas. Si $Y(t_o)$ e $Y(t_1)$ fueran especificadas en la formulación del problema, estas condiciones no estarían presentes, así como los multiplicadores respectivos.

Los sistemas (1.51) a (1.56) son las condiciones auxiliares que se han de satisfacer en cualquier problema de optimización con restricciones de desigualdad.

Una vez derivadas las condiciones que nos permiten concluir que el par de soluciones (Y^*, U^*) maximizará el funcional (1.42) sujeto a las restricciones (1.43) a (1.46), vamos a pasar a la prueba del teorema sobre la suficiencia, que se inspira básicamente en las condiciones de Khun-Tucker (1).

Demostraremos que si U^*, Y^*, Λ^*, W^*, r^*, S^* satisfacen las condiciones (1.43) a (1.46) y (1.47) a (1.56), entonces

$$I[Y^*, U^*] \geqslant I[Y\ U] \qquad (1.58)$$

Para simplificar, eliminaremos los argumentos de las funciones F, ϕ, G, R, P, Q

$$I[Y^*,U^*] - I[Y,U] = \int_{t_o}^{t_1} (F^*-F)\ dt + (\phi^*-\phi) \qquad (1.59)$$

Por los supuestos de diferenciabilidad y concavidad de F y ϕ, se seguirá que:

---

(1) Benavie (1973)

$$\geqslant \int_{t_o}^{t_1} \nabla F^{*}(Y,U,t) \begin{bmatrix} Y^{*}-Y \\ U^{*}-U \end{bmatrix} dt + \nabla\phi \begin{bmatrix} Y^{*}(t_o)-Y(t_o) \\ Y^{*}(t_1)-Y(t_1) \end{bmatrix} \tag{1.60}$$

$$= \{F_Y^{*}\ (Y^{*}-Y) + F_U^{*}\ (U^{*}-U)\}\ dt + \phi^{*}_{Y(t_o)} \left[Y^{*}(t_o)-Y(t_o)\right] +$$

$$+ \phi^{*}_{Y(t_1)} \left[Y^{*}(t_1)-Y(t_1)\right] \tag{1.61}$$

Por las condiciones (1.51), (1.52), (1.53), (1.54) y (1.61), será igual a:

$$= \int_{t_o}^{t_1} \{-(Y^{*}-Y)(\Lambda^{*}G_Y^{*} + W^{*}R_Y^{*} + \dot{\Lambda}^{*}) - (U^{*}-U)(\Lambda^{*}G_U^{*}+W^{*}R_U^{*})\}dt$$

$$- \left[Y^{*}(t_o)-Y(t_o)\right] \left[\Lambda^{*}(t_o) + r^{*}P_{Y(t_o)}\right] -$$

$$- \left[Y^{*}(t_1)-Y(t_1)\right] \Lambda^{*}(t_1) - s^{*}\phi_{Y(t_1)} \tag{1.62}$$

Integrando por partes el sistema dinámico y teniendo en cuenta la continuidad de $Y^{*}(t)$ y $\Lambda^{*}(t)$, tendremos que (1.62) será igual a:

$$= \int_{t_o}^{t_1} \left[-(Y^{*}-Y)(\Lambda^{*}G_Y^{*} \; W^{*}R_Y^{*}) - (U^{*}-U)(\Lambda^{*}G_U^{*} \; W^{*}R_U^{*}) + \right.$$

$$\left. + \Lambda^{*}(G^{*}-G) \right] dt - \left[Y^{*}(t_o)-Y(t_o) \right] r^{*}P_{Y(t_o)} -$$

$$- \left[Y^{*}(t_1)-Y(t_1) \right] s^{*}Q_{Y(t_1)} \qquad (1.63)$$

Por la diferenciabilidad y concavidad de G y R y las condiciones (1.55) y (1.57), (1.63) será mayor o igual a

$$\geq \int_{t_o}^{t_1} \left[\Lambda^{*}(G-G^{*}) + W^{*}(R-R^{*}) + \Lambda(G^{*}-G) \right] dt -$$

$$- \left[Y^{*}(t_o)-Y(t_o) \right] r^{*}P_{Y(t_o)} - \left[Y^{*}(t_1)-Y(t_1) \right] s^{*}Q_{Y(t_1)} \qquad (1.64)$$

Como $W^{*}R = 0$, siendo $W^{*} \geq 0$ y $R \leq 0$, tendremos:

$$\geq - \left[Y^{*}(t_o)-Y(t_o) \right] r^{*}P_{Y(t_o)} - \left[Y^{*}(t_1)-Y(t_1) \right] s^{*}Q_{Y(t_1)} \qquad (1.65)$$

La concavidad y diferenciabilidad de P y Q y las condiciones $r^* \geqslant 0$ y $s^* \geqslant 0$, nos conducen a:

$$r^*p^* - r^*p \geqslant s^*q^* + s^*q \qquad (1.66)$$

Por (1.52), (1.54), (1.51), (1.45), (1.53) y (1.46),

$$\geqslant 0 \qquad (1.67)$$

Las restricciones sobre $Y(t_o)$ e $Y(t_1)$ son bastante generales y, así, pueden incluir todo tipo de igualdades. Esto es, una restricción como

$$Y(t_o) = Y_o$$

es una consecuencia del par de desigualdades

$$Y(t_o) - Y_o \leqslant 0$$

$$- Y(t_o) + Y_o \leqslant 0$$

Si las condiciones extremas fueran

$$Y(t_o) = Y_o$$

$$Y(t_1) = Y_1$$

entonces el Teorema se mantiene, salvo en las ecuaciones (1.49), (1.50), (1.51), (1.52), (1.53), (1.54), y los vectores r^* y s^*, que no aparecerían (1).

Por tanto, se ha demostrado que si la función integrando del modelo es cóncava y las funciones restricción cóncavas o convexas según el signo de los multiplicadores correspondientes, entonces las condiciones necesarias del Principio del Máximo son suficientes para un máximo global.

---

(1) En el trabajo ya mencionado, Mangasarian demuestra la suficiencia para el problema de control con intervalo temporal fijado con restricciones más específicas que las aquí analizadas.

CAPITULO 2

UN PROBLEMA DE OPTIMIZACION DINAMICA CON RESTRICCIONES:

"LAS CONDICIONES NECESARIAS DE OPTIMALIDAD"

2.1. INTRODUCCION

En la mayoría de las aplicaciones del Principio del Máximo de Pontryagin nos enfrentamos a restricciones tanto sobre las variables de control como sobre las variables de estado.

La condición (1.19) que gobierna la derivada de la función Hamiltoniana con respecto al control se aplica, bien cuando la variable de control no está sometida a restricciones, como sucede en el Capítulo 1, o bien cuando no está sobre el límite del conjunto de controles admisibles, lo que es equivalente a decir que las restricciones sobre las variables de control no son activas. Pero cuando el óptimo se da en la frontera de $\bar{U}_p$, la condición (1.19) deja de operar y en la condición de Principio del Máximo entran términos adicionales que recogen la presencia de restricciones.

Si las restricciones sobre las variables de control son activas o, lo que es lo mismo, el óptimo ocurre en un punto límite del conjunto $\bar{U}_p$, entonces la condición (1.19) será menor o igual a cero, ya que en el lado izquierdo de (1.19) habrá que añadir el término adicional que recoja la presencia de restricciones activas.

La maximización de la nueva función con el resto de condiciones necesarias y de contorno nos permitirá derivar el Principio del Máximo para el caso de restricciones de control.

En cuanto a las variables de estado, la inclusión de restricciones sobre el estado del proceso complicará algo más la derivación del Principio del Máximo correspondiente. Esta complicación arranca de la conducta de las variables de estado y su correspondiente multiplicador cuando aquéllas descansan sobre el límite de la región estado ($\bar{Y}p$).

Cuando el estado del sistema está en el interior de $\bar{Y}_p$ o, lo que es lo mismo, las restricciones de estado no son activas, las condiciones necesarias del Capítulo 1 no se alteran y la condición de Principio del Máximo es la misma. Si, por el contrario, el estado se mueve a lo largo del límite de $\bar{Y}_p$, habrá un conjunto de condiciones adicionales que intervienen modificando el sistema dinámico. Si las variables auxiliares fueron incorporadas como los multiplicadores asociados a las ecuaciones de transición, es obvio que la modificación del sistema dinámico vendrá acompañada por alteraciones correspondientes en las variables adjuntas recogidas en su ecuación correspon diente. En el punto donde el estado toca el límite, un conjunto adicional de condiciones llevarán a discontinuidades en las variables auxiliares.

A la vista de la posible presencia de estos dos tipos de restricciones sobre las funciones que intervienen en un problema de control óptimo, nuestro objetivo en este Capítulo se centrará en el estudio de la resolución de problemas con estos condicionamientos, haciendo especial hincapié en la posibilidad, bajo el supuesto de cumplimiento de determinados condicionamientos llamados de regularidad, de transformación en problemas clásicos de Lagrange.

2.2. RESTRICCIONES SOBRE LAS VARIABLES CONTROL

La condición (1.22) del Principio del Máximo deducida en el Capítulo 1 tiene sentido, o bien cuando el control no está sometido a restricciones, o bien cuando las restricciones de control no son activas (esto es, el óptimo es un punto interior del conjunto de controles permitidos). Los más avanzados resultados en este sentido admiten que el control óptimo se base sobre el límite de $\overline{U}_p$ (región control) al mismo tiempo que $\overline{U}_p$ varía con el estado del sistema (Y) y con el tiempo (t). En la mayor parte de las aplicaciones de la Moderna Teoría del Control (1) el conjunto de controles permitidos o región control ($\overline{U}_p$) está formado por todas aquellas funciones control que satisfacen un conjunto de restricciones de la forma

$$r^i\ (t,\ U,\ Y) \leqslant 0 \qquad \forall i,\ i = 1,\ \ldots,\ n$$

---

(1) Un estudio completo sobre las aplicaciones de la Teoría del Control, además de las recogidas en la Introducción General de este trabajo, se encuentra en Fel'dbaum (1975). Un trabajo similar hace Sethi and Thompson (1981).

que se acostumbra a expresar en forma vectorial como

$$R(t, Y, U) \leqslant 0 \tag{2.1}$$

y por tanto $\overline{U}_p$ se definirá como el conjunto de controles "U" que satisfacen la restricción (2.1) para unos valores de (t, Y) especificados.

Consiguientemente, la región control variará con (t, Y) para el caso más general, aunque pueden presentarse subcasos particulares de éste, como por ejemplo que $\overline{U}_p$ sea independiente de Y.

En este apartado centraremos nuestro estudio en el caso más general, esto es, con restricciones como (2.1), que nos permitirá analizar otras formas de restricciones de control.

El problema de control, una vez presentes restricciones como (2.1), se centrará en determinar una función contínua a trozos "U" y la correspondiente trayectoria de estado óptima "Y(t)" que maximiza el funcional

$$I(Y, U) = \int_{t_o}^{t_1} F(t, Y, U)\, dt \tag{2.2}$$

mientras se satisface:

$$\dot{Y} = G(t, Y, U) \tag{2.3}$$

$$R(t, Y, U) \leqslant 0 \tag{2.4}$$

con las condiciones extremas:

$$Y(t_o) = Y_o \tag{2.5}$$

$$Y(t_1) = Y_1 \tag{2.6}$$

La incorporación de la restricción (2.4) en las variables de control no añade gran complejidad al Principio del máximo, aunque sí términos adicionales que recogen la existencia de tales condicionamientos.

La deducción de las condiciones necesarias para el problema formulado por las expresiones (2.2) a (2.6) se hará convirtiendo el problema en cuestión en uno de Lagrange (1). Con este fin, la restricción (2.4)

---

(1) Una versión resumida de los resultados se encuentra en Miller (1979).

habrá de cumplir una serie de restricciones (1) que garanticen la aplicabilidad de las técnicas de Lagrange.

Para resolver nuestro problema vamos a seguir en un principio el procedimiento de Valentine (1937), que sugiere convertir una desigualdad diferencial tal como

$$R(t, Y, \dot{y}) \leq 0$$

---

(1) Llamadas restricciones de cualificación en términos de Hadley-Kemp (1971). Estos autores resumen estas restricciones en dos:

i) Si el número de restricciones control h es mayor que el número de variables control m, no existe algún punto (t, Y, U) que satisfaga (2.1) y para el cual más de m de las restricciones sean activas.

ii) Sea (t, Y, U) una solución a (2.1). Si k de estas restricciones son activas, entonces la matriz (m x k) de las derivadas parciales de (2.1) respecto a las variables control tiene rango k. En otras palabras, esta condición establece que al menos una variable de control de las m aparece explícitamente en cada restricción. Por restricciones activas se definen aquellas r^i de (2.1) que son iguales a cero, e inactivas las menores. Esto es, las primeras son soluciones límites de $\overline{U}_p$, y las segundas son interiores a $\overline{U}_p$.

en una ecuación diferencial del tipo permitido en la formulación del problema de Lagrange, mediante la adición en cada una de las desigualdades de una variable denominada de holgura (1).

---

(1) El procedimiento de Valentine es como sigue:

Supongamos que tenemos una función contínua con esquinas $y(t)$ tal que

$$R(t, y, y') \leqslant 0 \ , \quad \forall t \ / \ t_o \leqslant t \leqslant t_1$$

y sea $\phi(t)$ la opuesta de $R(t,y,y')$, es decir:

$$\phi(t) = - R(t, y, y')$$

Por tanto, $\phi(t)$ será mayor o igual a cero y, consiguientemente, contínua a saltos. Definamos una nueva función $\theta(t)$ igual a la raiz cuadrada de $\phi(t)$ y por tanto contínua a saltos, cuya integral entre los límites t_1 y t_o es una nueva función $\gamma(t)$.

$$\gamma(t) = \int_{t_o}^{t_1} \theta(t)\, dt$$

donde $\gamma(t)$ es una función contínua con esquinas al ser la integral de una función contínua a saltos.

Por tanto,

$$\dot{\gamma}(t) = \theta(t)$$

en todos los puntos donde $\theta(t)$ existe.

Por tanto, si a la desigualdad inicial $R(t,y,y')$ añadimos la derivada temporal de $\gamma(t)$ al cuadrado, la expresión resultante será cero, esto es,

$$R(t, y, y') + \dot{\gamma}^2 = 0$$

Esta ecuación diferencial tendrá solución siempre que la desigualdad tenga una solución.

El procedimiento de Valentine está orientado, tal como se señalaba, al problema de Lagrange; y, por tanto, su aplicación nos lleva a la conversión de nuestro problema de control en uno de Lagrange.

El primer paso para llevar a cabo esta transformación consiste en eliminar las variables de control, que son funciones contínuas a saltos, ya que en la teoría clásica variacional todas las funciones son contínuas o, a lo más, con esquinas (1).

Para este fin, introducimos un nuevo conjunto de variables "V", contínuas con esquinas, las derivadas de las cuales funciones contínuas a saltos son las variables de control; es decir,

$$\dot{V} = U \qquad (2.7)$$

Llevando este cambio de variables al problema formulado en (2.2) a (2.6), éste puede reescribirse como:

$$\text{Maximizar } I(Y, V) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, Y, \dot{V})\, dt \qquad (2.8)$$

---

(1) Véase Anexo A.

dadas las condiciones y restricciones siguientes:

$$Y(t_o) = Y_o \tag{2.9}$$

$$Y(t_1) = Y_1 \tag{2.10}$$

$$\dot{Y} = G(t, Y, \dot{V}) \tag{2.11}$$

$$R(t, Y, \dot{V}) \leqslant 0 \tag{2.12}$$

Siguiendo el procedimiento de Valentine, explicado en las páginas anteriores, la restricción (2.12) puede transformarse en un sistema de ecuaciones diferenciales. Para ello, definamos la función:

$$W(t) = - R(t, Y, \dot{V}) \tag{2.13}$$

que será contínua a trozos (1). La raiz cuadrada de W(t) será otra función $\varphi(t)$ con las mismas características que W(t).

---

(1) Ya que $\dot{V}$ sólo necesita ser contínua a trozos.

Por último, sea

$$\int_{t_o}^{t_1} \varphi(t)\ dt = P(t) \qquad (2.14)$$

donde P(t) es una función contínua con esquinas ya que es la integral de una función contínua a trozos. De (2.14) se sigue que:

$$\dot{P} = \varphi(t) \qquad (2.15)$$

Por tanto, esta función $\dot{P}$ es la que buscábamos. Si elevamos (2.15) al cuadrado, tendremos

$$\dot{P}^2 = \varphi(t)^2 = W(t) = -R(t, Y, \dot{V})$$

Consiguientemente, añadiendo a la restricción de desigualdad (2.12) la nueva función $\dot{P}^2$ habremos convertido la desigualdad diferencial (2.12) en un sistema de ecuaciones diferenciales que responde a la forma

$$R(t, Y, \dot{V}) + \dot{P}^2 = 0 \qquad (2.16)$$

Por tanto, el problema de control planteado por (2.2) a (2.6) se reduce, después de la transformación, a uno de Lagrange, a encontrar las funciones contínuas con esquinas Y(t), V(t) y P(t) que maximizan

$$I(Y, V) = \int_{t_o}^{t_1} F(t, Y, \dot{V})\, dt \qquad (2.17)$$

mientras satisfacen:

$$\dot{Y} = G(t, Y, \dot{V}) \qquad (2.18)$$

$$R(t, Y, \dot{V}) + \dot{P}^2 = 0 \qquad (2.19)$$

con las condiciones extremas fijadas:

$$Y(t_o) = Y_o \qquad (2.20)$$

$$Y(t_1) = Y_1 \qquad (2.21)$$

Es preciso resaltar en este punto que, respecto a las condiciones extremas, ni la variable V ni P tienen límites fijados y que, por tanto, ésto ha de tenerse en cuenta a la hora de derivar las condiciones adicionales de transversalidad.

Tal como se opera en la teoría clásica (1), la solución al problema de optimización, donde el vector de funciones contínuas con esquinas es

$$Y^{*}(t) = \left[(Y(t),\ V(t),\ P(t)) \right]'$$

y el de las derivadas temporales (funciones contínuas a trozos),

$$\dot{Y}^{*} = (\dot{Y},\ \dot{V},\ \dot{P})'$$

exige la deducción de las condiciones necesarias que la solución óptima debe satisfacer.

---

(1) Ver Anexo A.

2.2.1. Las Condiciones Necesarias

El planteamiento de las condiciones necesarias de un problema de Lagrange parte de la existencia de un conjunto de multiplicadores

$$\left[\lambda_o, \Lambda(t), \mu(t)\right]$$

donde λ_o es una constante que puede tomar con toda generalidad el valor 0 ó 1 (1). Este conjunto de multiplicadores tiene dos características: 1º) No se hacen cero simultáneamente para cada t, y 2º) son funciones contínuas excepto en las posibles esquinas de la función vectorial óptima $Y^*(t)$.

Supondremos para el desarrollo de esta sección y las restantes de nuestro trabajo que $\lambda_o = 1$. Por tanto, la función auxiliar correspondiente tendrá la forma:

$$L = F + \Lambda(t)(G-\dot{Y}) + \mu(t)(R+\dot{P}^2) \qquad (2.22)$$

tal que si la solución óptima es Y^*, entre las esquinas de la misma se satisface el sistema de ecuacio-

---

(1) Un estudio exhaustivo sobre los dos posibles valores de la constante λ_o se encuentra en Martín Guzmán (1976), pág. 36.

nes de Euler siguiente (1):

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{Y}^*} - L_{Y^*} = 0 \qquad (2.23)$$

Además, por las condiciones de esquina de Weierstrass-Erdman (2), entre las esquinas de la solución óptima (Y^*), $L_{\dot{Y}^*}$ debe ser contínua. Esta condición, como más tarde veremos, nos aporta información sobre el requisito de continuidad de las variables adjuntas o auxiliares ($\Lambda(t)$).

El sistema (2.23) estaría formado por los tres sistemas siguientes:

---

(1) El procedimiento para derivar el sistema de ecuaciones de Euler es idéntico al que siguen Gelfand y Fomin (1963).

(2) Estas condiciones son estudiadas en el Anexo A. Un desarrollo más formalizado de las mismas se encuentra en Smith (1974).

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{Y}} - L_Y = 0 \qquad (2.24)$$

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{V}} - L_V = 0 \qquad (2.25)$$

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{P}} - L_P = 0 \qquad (2.26)$$

Vamos a calcular el valor de cada uno de estos tres subsistemas de Euler; para ello, derivaremos en (2.22) respecto a cada una de las variables de los vectores Y^* e $\dot{Y}^*$, respectivamente.

Para el primer sistema (2.24), tendríamos:

$$L_Y = F_Y + \Lambda(t).G_Y + \mu(t).R_Y$$

$$L_{\dot{Y}} = -\Lambda(t)$$

entonces,

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{Y}} = -\dot{\Lambda}$$

Por tanto, (2.24) se transforma en

$$-\dot{\Lambda} = F_Y + \mu(t).G_Y + \mu(t).R_Y$$

que, en términos de una función hamiltoniana definida como en (1.9)

$$H = F + \Lambda(t).G$$

quedaría como

$$-\dot{\Lambda} = H_Y + \mu(t).R_Y \qquad (2.27)$$

Entonces, dado que $L_{\dot{Y}} = -\Lambda(t)$ es una función contínua, a través de las esquinas de la solución óptima $\dot{Y}$ se sigue que la función $\Lambda(t)$ también lo es, tal como se requiere en la moderna teoría del Control.

El mismo razonamiento se puede seguir para el resto de los sistemas de (2.23). Así, respecto a (2.25) tendremos:

$$L_V = 0$$

$$L_{\dot{V}} = F_{\dot{V}} + \Lambda(t).G_{\dot{V}} + \mu(t).R_{\dot{V}} =$$

$$= H_{\dot{V}} + \mu(t).R_{\dot{V}} \qquad (2.28)$$

como, por (2.25),

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{V}} = L_V$$

tendremos que, para nuestro caso,

$$L_{\dot{V}} = \text{constante} \tag{2.29}$$

donde $L_{\dot{V}}$ está dado por (2.28).

Respecto al tercer sistema de ecuaciones de Euler (2.26), calculando las derivadas respectivas llegamos a

$$L_P = 0$$

$$L_{\dot{P}} = 2\mu\dot{P} \tag{2.30}$$

y, como de (2.21)

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{P}} = L_P$$

para nuestro problema

$$L_{\dot{P}} = \text{constante} \tag{2.31}$$

donde el valor de $L_{\dot{P}}$ está dado por (2.30).

Para estudiar el valor de las constantes en (2.29) y (2.31) vamos a fijarnos en el hecho de que las variables V y P tienen límites libres. En este caso, por las condiciones de transversalidad (1), tendrá que satisfacerse para V que

$$L_{\dot{V}} = 0 \tag{2.32}$$

Por tanto, el valor de la constante en (2.29) es cero; y para $\dot{P}$

$$L_{\dot{P}} = 0 \tag{2.33}$$

que nos dice que el valor de la constante en (2.31) es cero a lo largo del sendero óptimo.

---

(1) Según las condiciones de transversalidad, estudiadas en el Capítulo 1 y en el Anexo A, se habrá de cumplir que:

$$\begin{bmatrix} L_{\dot{V}} \\ \\ L_{\dot{P}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta V \\ \\ \delta P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como $\delta V = \delta P \neq 0$, entonces:

$$\begin{bmatrix} L_{\dot{V}} \\ \\ L_{\dot{P}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta (2.28), de (2.32) llegamos a establecer que la primera condición adicional:

$$H_{\dot{V}} + \mu(t).R_{\dot{V}} = 0 \qquad (2.34)$$

no es más que el Principio de Máximo de Pontryagin para un problema de control con restricciones como (2.9) donde $\dot{V} = U$.

Del mismo modo, considerando (2.30), desde (2.33) se obtiene la segunda condición adicional derivada del requerimiento de transversalidad, que se reduce a que:

$$\mu(t).\dot{P} = 0 \qquad (2.35)$$

El análisis de esta segunda condición adicional (2.35) nos conduce a los dos casos siguientes:

i) Que (2.35) se satisfaga siendo $\mu(t) = 0$ y $\dot{P} \neq 0$; esto es equivalente a decir que no hay restricciones activas sobre las variables de control, y las condiciones necesarias de la moderna teoría del control serían las dadas en el Capítulo I.

ii) Que (2.35) se verifique siendo $\dot{P} = 0$ con $\mu(t) \neq 0$. Si $\dot{P}$ es nula, entonces $\dot{P}^2$ también será cero, y (2.35) podría expresarse como:

$$\mu(t) \cdot R = 0 \qquad (2.36)$$

para $\mu(t) \neq 0$ y $R \leqslant 0$.

Las condiciones necesarias de primer orden estudiadas hasta aquí nos ayudan a seleccionar los valores óptimos de cada una de las variables. El que los valores óptimos determinados sean máximos o mínimos nos viene confirmado por el siguiente conjunto de condiciones necesarias:

A) La Condición de Legendre

La condición necesaria de segundo orden para la maximización de la función de Lagrange exige que la matriz hessiana de las derivadas parciales de segundo orden de la función a maximizar sea semidefinida negativa. La matriz es:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{P}\,\partial \dot{P}} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{P}\,\partial \dot{Y}} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{P}\,\partial \dot{V}} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{Y}\,\partial \dot{P}} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{Y}\,\partial \dot{Y}} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{Y}\,\partial \dot{V}} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{V}\,\partial \dot{P}} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{V}\,\partial \dot{Y}} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{V}\,\partial \dot{V}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para que sea semidefinida negativa, los menores principales han de ir alternándose de signo, empezando en no positivo. Como sólo el primero es distinto de cero, para que este menor principal sea no positivo el multiplicador que acompaña a las restricciones de control ha de ser negativo (1). Por tanto,

$$\text{si} \quad 2\mu(t) \leqslant 0$$

$$\text{entonces,} \quad \mu(t) \leqslant 0, \quad \forall t \in [t_o, t_1] \qquad (2.37)$$

B) Una segunda condición necesaria en la teoría clásica es la de Weierstrass. Según esta condición, la existencia de un máximo local se traduce en que la función denominada "exceso de Weierstrass" (E) sea semidefinida negativa. Para demostrarla utilizaremos los siguientes conceptos:

---

(1) El signo de $\mu(t)$ será uno u otro dependiendo del signo antepuesto a este multiplicador en la Lagrangiana. En nuestro caso este signo es positivo y nos conduce a $\mu \leqslant 0$. Otros autores como Miller (1979) utilizan un signo "menos" en la Lagrangiana y, por tanto, obtienen un $\mu \geqslant 0$, $\forall t \in [t_o\ t_1]$

Supongamos, tal como hemos venido haciéndolo, que Y^* es la trayectoria óptima, y sea Z otra trayectoria considerada admisible (ya que satisface las restricciones y condiciones (2.2) à (2.6)), que definimos como

$$Z(t) = \left[Y(t),\ W(t),\ P(t)\right]'$$

Tal como se ha definido Z, sólo difiere de Y^* en las funciones de control.

Una vez definida Z como una trayectoria no óptima, la función exceso de Weierstrass quedaría:

$$E(t,\ Y^*,\ \dot{Y}^*,\ \dot{Z}) = L(t,\ Y^*,\ \dot{Z}) - L(t,\ Y^*,\ \dot{Y}^*) - \\ - (\dot{Z} - \dot{Y}^*) . L_{\dot{Y}^*} \qquad (2.38)$$

que tendrá que ser menor o igual a cero si la trayectoria óptima es Y^*.

El último sumando del lado derecho de (2.38) es igual a:

$$- (\dot{W} - \dot{V})\ L_{\dot{V}} = (\dot{V} - \dot{W})\ L_{\dot{V}} \qquad (2.39)$$

Ahora bien, si (2.32) se satisface, el término (2.39) desaparece y la expresión (2.38) quedaría:

$$E(t,\ Y^{*},\ \dot{Y}^{*},\ \dot{Z}) = L(t,\ Y^{*},\ \dot{Z}) - L(t,\ Y^{*},\ \dot{Y}^{*}) \qquad (2.40)$$

Si definimos una función Hamiltoniana H^{*} como

$$H^{*} = H + \mu(t) .\ R \qquad (2.41)$$

la función (2.22) podría expresarse como:

$$L = H^{*} - \Lambda(t) .\ \dot{Y} + \mu(t) .\ \dot{P}^{2} \qquad (2.42)$$

Llevando (2.42) a (2.40) y recordando que Z e Y^{*} sólo difieren en las funciones $\dot{V}$, la ecuación (2.40) quedará:

$$E(t,\ Y^{*},\ \dot{Y}^{*},\ \dot{Z}) = H^{*}(t,\ Y,\ \dot{W},\ \Lambda,\ \mu) - H^{*}(t,Y,\dot{V},\Lambda,\mu)$$
$$\leqslant 0 \qquad (2.43)$$

ya que se trata de un máximo.

O, lo que es lo mismo, utilizando la notación del Capítulo I:

$$H(t,\ Y,\ \dot{W},\ \Lambda) \leqslant H(t,\ Y,\ \dot{V},\ \Lambda) \qquad (2.44)$$

con $R \leq 0$

donde (2.43) ó (2.44) son equivalentes a decir que $\dot{V}$ es la función que, para unos valores dados de (t, Y, Λ, μ) maximiza H^{*}.

Si tenemos en cuenta el cambio de variables (2.27), observamos que la condición de Weierstrass (2.43) no es más que el Principio de Máximo para un problema de control con restricciones sobre las variables de política (o de control), que puede expresarse como:

$$H(t, Y, U+\delta U, \Lambda) \leq H(t, Y, U, \Lambda) \qquad (2.45)$$

siendo $\mu \leq 0$, $R \leq 0$

donde con U+δU se quiere expresar cualquier otra función control admisible que representa una variación respecto al control óptimo "U".

Por último, vamos a estudiar brevemente el caso de restricciones control cuya forma general responde a (1):

$$R(t, U) \leq 0 \qquad (2.46)$$

---

(1) Este será el tipo de restricciones de control a utilizar en nuestro modelo empírico, aunque la particularidad de la función Hamiltoniana nos conduce a una función de control óptimo bang-bang.

Siguiendo el mismo procedimiento que para las restricciones (2.4) (1), llegaríamos a obtener las siguientes condiciones necesarias para el problema de control:

$$H_Y = - \dot{\Lambda} \tag{2.47}$$

$$H_\Lambda = \dot{Y} \tag{2.48}$$

$$H_U + \mu . R_U = 0 \tag{2.49}$$

con la condición adicional:

$$\mu(t) . R(t, U) = 0 \tag{2.50}$$

siendo $\mu(t) \leqslant 0$ y $R(t, U) \leqslant 0$.

Si observamos las condiciones para esta forma de restricciones, rápidamente se ve cómo sólo una condición necesaria (la (2.49)) difiere de las condiciones deducidas en el Capítulo 1. Esta diferencia está en el término $\mu . R_U$, que recoge la existencia de las restricciones de control.

---

(1) Con ésto nos referimos al proceso de transformación del problema en uno de Lagrange.

Respecto a la transversalidad, si la trayectoria óptima intersecta a la variedad $\mathcal{M}$ en t_1, entonces tendremos la condición adicional de contorno derivada del requisito de que $\bar{\Lambda}(t_1)$ sea ortogonal a $\mathcal{M}_1(t_1)$.

Estudiando con un poco más de detalle esta afirmación, tendremos:

Si t_1 es fijado y $\mathcal{M}$ viene definida por k hipersuperficies $S^i(t, Y) = 0$, tendremos que $\Lambda(t_1)$ debe ser una combinación lineal de las S^i_Y en el punto terminal. O, en otros términos, supongamos que tenemos la restricción:

$$t - t_1 = 0 \tag{2.51}$$

entonces sólo las S^i de interés serán aquéllas que satisfagan (2.51), esto es, aquéllas que podemos denominar $\mathcal{M}_1$. De esta forma, las parciales S^i_Y evaluadas en t_1 son los vectores normales a $\mathcal{M}_1(t_1)$. Y de este modo se llega a la condición apuntada al principio de que $\Lambda(t_1)$ debe ser ortogonal a $\mathcal{M}_1(t_1)$ en el punto t_1.

Si, por el contrario, la restricción $t - t_1 = 0$ no estuviera dada, entonces $H(t_1)$ debe ser una combinación lineal de las $S_t^i \Big|_{t=t_1}$. Esto último no aportaría información alguna si la restricción (2.51) está dada (1).

Sin embargo, si ésto no aparece, la transversalidad daría las condiciones de contorno:

$$\Lambda(t_1) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i \, S_Y^i$$

$$H(t_1) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i \, S_t^i$$

Si las S^i son independientes de t, entonces $H = 0$ en t_1 y para un sistema autónomo ésto implica que $H = 0$ a lo largo del sendero entero.

---

(1) Un estudio completo sobre condiciones de contorno adicionales se encuentra en Smith (1974).

2.2.2. La Cuestión de Suficiencia

Las condiciones del Principio de Máximo con restricciones de control serán suficientes si las funciones integrantes del problema formulado por (2.2) a (2.6) son cóncavas (1). Veamos ésto con algo más de detalle.

Sea U(t) el control óptimo y sea Y(t) la correspondiente trayectoria de estado óptima. Por tanto, U(t) e Y(t) satisfarán las condiciones necesarias del Principio de Máximo de Pontryagin cuando las funciones auxiliares son

$$[\Lambda(t),\ \mu(t)]$$

Sea H(t, Y, U) la función Hamiltoniana que corresponde a las variables de estado Y(t). Entonces, si las r^i, $\forall i \;/\; i = 1, \ldots, h$ son funciones convexas de (Y, U), $\forall t \;/\; t \in [t_o, t_1]$ y H(t, Y, U) es una función cóncava de (Y, U), $\forall t \;/\; t \in [t_o, t_1]$ y, para todo (Y, U) en el conjunto convexo $\bar{U}_p$ definido por las h ecuaciones $r \leq 0$, U(t) es el control ópti

---

(1) Un tratamiento más exhaustivo de estas condiciones se encuentra en Takayama (1974).

mo, entonces $[Y(t), U(t)]$ dan un máximo absoluto del funcional $I(Y, U)$.

Si $H(t, Y, U)$ es convexa $\forall t$, entonces, bajo las mismas condiciones, el par $[Y(t), U(t)]$ da un mínimo absoluto de $I(Y, U)$.

Volviendo al problema formulado, donde teníamos que el objetivo era:

$$\text{Maximizar } I(Y, U) = \int_{t_o}^{t_1} F(t, Y, U)\, dt$$

sujeta a las restricciones:

$$\dot{Y} = G(t, Y, U)$$

$$R(t, Y, U) \leq 0$$

$$Y(t_o) = Y_o$$

$$Y(t_1) = Y_1$$

entonces, si para cada t la función auxiliar

$$L = F + \Lambda(t)\ (G - \dot{Y}) + \mu(t)\ (R + \dot{P}^2)$$

es una función cóncava de los vectores Y^* e $\dot{Y}^*$ para $[\Lambda(t), \mu(t)]$ determinados en la solución, entonces la solución de las condiciones necesarias da un máximo absoluto de $I(Y^*)$.

Recordemos que al ser $\mu(t) \leqslant 0$, la función $\mu.\dot{P}^2$ es una función cóncava de $\dot{P}^2$. Consiguientemente, si cada r^i, $\forall i / i = 1, \ldots, h$, es una función convexa de (Y, U), entonces $\mu.R$ será una función cóncava de (Y, U). El requisito de que cada r^i sea una función convexa implica para cada t que el conjunto de puntos (Y, U) que satisfacen el sistema

$$R(t, Y, U) \leqslant 0$$

es un conjunto convexo.

Por último, vamos a resumir brevemente los resultados obtenidos para el problema que hemos formulado, haciendo especial hincapié en las condiciones necesarias.

Como hemos venido estudiando a lo largo de este apartado, la presencia de restricciones de control del tipo (2.4)

$$R(t, Y, U) \leqslant 0$$

nos ha llevado a resolver el problema de control a partir de la transformación en uno de Lagrange y, por tanto, a obtener el conjunto de condiciones necesarias que el estado (Y) y el control (U) óptimos deben satisfacer.

Este conjunto de condiciones necesarias expresadas por las ecuaciones (2.22) y (2.23) (o bien (2.40)) sólo diferirán de las obtenidas para el problema de Control del Capítulo 1 cuando haya parte de las h restricciones (2.4) que sean activas (es decir, R = 0) ó, lo que es lo mismo, el control óptimo descanse en el límite de $\bar{U}_p$.

Una vez deducido el signo de $\mu(t)$ por la condición de Legendre (1), la expresión (2.18) de la función auxiliar podría reescribirse como:

$$L = F + \Lambda(G - \dot{Y}) + \mu R - \mu \dot{P}^2$$

ya que

$$\mu \leqslant 0 \quad y \quad \dot{P} > 0$$

Por lo que se refiere a las condiciones suficientes de optimalidad, es obvio a partir de la sección 1.4. del Capítulo I que si la función auxiliar L de un problema con restricciones control es cóncava en U, entonces la condición

---

(1) Signo que podría haber sido determinado por las condiciones Khun-Tucker. (Véase Benavie, (1973))

$$\frac{\partial L}{\partial U} = 0 \qquad \text{con } \mu . R = 0 \quad \text{para } \mu \leq 0 \qquad (2.51)$$

implica la condición:

$$H\ (Y,\ U,\ \Lambda,\ t) \geq H(Y,\ W,\ \Lambda,\ t)$$

$$\forall U \in \overline{U}_p \qquad \text{tal que} \qquad R \leq 0$$

donde la función H del lado izquierdo de la desigualdad está evaluada en los valores óptimos de sus argumentos, y donde "W" es cualquier otra función de control admisible distinta de la óptima U.

2.3. EL PRINCIPIO DEL MAXIMO CON RESTRICCIONES SOBRE LAS VARIABLES DE ESTADO

La inclusión de las restricciones sobre el estado del sistema complica algo más el análisis, pero representa una complicación necesaria en la mayor parte de los problemas prácticos. Afortunadamente, en la mayor parte de los casos se aplica una aproximación análoga a la de las secciones previas, aunque los resultados son en algunos casos particulares más difíciles de obtener. Las dificultades adicionales vienen motivadas por la conducta de la variable de estado cuando ésta toma un valor límite. Para poner de manifiesto esta dificultad, será útil considerar la analogía física (1) con una pelota que sigue una trayectoria que ocasionalmente hace que golpee contra un muro o que siga a lo largo del muro durante un período de tiempo.

---

(1) Un tratamiento más completo sobre esta analogía física se encuentra en Bensoussan, A.; Gerald- E. y Näslund (1974).

Cuando la pelota no está cerca del muro, ninguna restricción condiciona su trayectoria, y todo sucede como si el muro no estuviera allí. Cuando la pelota está yendo a lo largo de la pared, el movimiento de la pelota está adicionalmente restringido por la presencia de la pared, y ésto indirectamente influye sobre el control que debemos ejercer.

Estos autores utilizan la relación entre el Cálculo de Variaciones y la moderna teoría del control, solucionando el problema en cuestión como un caso particular del problema general de Bolza ,
que permite utilizar como instrumento básico la ecuación de Euler-Lagrange.

No obstante, existen otros procedimientos para resolver el problema de control con restricciones de estado; así Rockafellar (1970) y Bensoussan (1974), entre otros, utilizan el análisis convexo.

El problema general con restricciones de estado es análogo al de una situación física sencilla, y las matemáticas que rigen su conducta reflejan esta analogía.

Supongamos que está presente una restricción sobre el estado tal como

$$C(t, Y) \leq 0$$

Cuando el estado está en el interior de su región permisible, y por tanto la restricción en sí misma no es activa, las condiciones necesarias serían las mismas que si tales restricciones no estuvieran presentes. Cuando el movimiento es a lo largo del límite de la región permisible, debe operar un conjunto de condiciones adicionales para modificar las ecuaciones de transición y para reforzar esta trayectoria. Y, por tanto, si se producen alteraciones en las ecuaciones de transición, correspondientemente estas modificaciones deben reflejarse en los multiplicadores de Lagrange (o variables auxiliares) asociados.

Esto es, a lo largo del límite las ecuaciones adjuntas que gobiernan las variables auxiliares se modifican por medio de un término adicional que recoge el efecto del límite.

En el punto en que el estado alcanza su región límite u otra esquina, estarán presentes un conjunto adicional de condiciones que conducen a saltos (o discontinuidades) en las variables auxiliares.

Lo que es importante resaltar es que hay dos formas del Principio de Máximo, una en la que la variable adjunta es continua, y otra en la que no lo es.

Tipos de Restricciones.-

Las restricciones sobre las variables estado pueden revestir básicamente dos formas:

a) $C(t, Y) = 0$

b) $C(t, Y) \leq 0$

donde, como puede observarse, en ninguna de ellas aparecen de forma explícita las variables control (1). Para visualizar la conexión entre las variables objeto de la restricción y las variables de control, vamos a transformar las formas de restricción a) y b) en ecuaciones diferenciales (2).

En cuanto a la primera forma (a) observaremos que para algún estado dado (Y(t)), C llega a ser una

---

(1) Cuando las variables de control no entran como argumento en las restricciones de estado, estas últimas se denominan "restricciones puras" sobre las variables de estado (Arrow-Kurtz, 1970).

(2) Una vez más es posible convertir el problema de control en uno clásico de varias variables. Así será posible aplicar el procedimiento de Valentine y deducir a partir de las condiciones necesarias del problema de Lagrange las condiciones necesarias del problema de control. Véase en este sentido Hestenes (1966).

función $\phi(t)$. Si $Y(t)$ satisface la restricción a), $\forall t \,/\, t \in [t_o \; t_1]$, entonces la derivada de $\phi(t)$ respecto al tiempo ha de ser idénticamente nula. Esto es,

$$\dot{\phi}(t) = C_t + C_Y \cdot \dot{Y} \equiv 0 \qquad (2.52)$$

Ahora bien, como por el sistema dinámico sabemos que

$$\dot{Y} = G(t, Y, U)$$

entonces (2.52) puede reescribirse como

$$\dot{\phi}(t) = C_t + C_Y \cdot G(t, Y, U) \equiv 0 \qquad (2.53)$$

con lo cual queda explicada la relación entre las variables de estado y de control para la restricción de la forma a). Ahora bien, la diferenciación de la restricción original supone una pérdida de información que se suple si a la ecuación diferencial (2.53) añadimos la condición adicional

$$C\,[t_o, Y(t_o)] = 0 \qquad (2.54)$$

Por tanto, podemos concluir que si las derivadas parciales de C en la forma a) existen, la restricción a) es equivalente al par de ecuaciones:

$$C_t + C_Y . \dot{Y} \equiv 0 \qquad (2.55)$$

$$C(t_o, Y(t_o)) = 0 \qquad (2.56)$$

En cuanto a la restricción de la forma b), los problemas que se plantean difieren de los expuestos anteriormente debido principalmente a la imposibilidad de conocer el signo y valor de la derivada respecto al tiempo para algún Y(t) dado.

Esta dificultad nos lleva a una investigación más detallada del problema de control que incorpora este tipo de restricciones. Nuestra primera etapa será estudiar el método matemático adecuado que nos permita expresar este tipo de restricciones como ecuaciones diferenciales.

Siguiendo a Valentine (1), el procedimiento para convertir desigualdades en ecuaciones diferenciales (compatibles con el método de optimización clási-

---

(1) Valentine (1937)

co) se basa en introducir una variable denominada de holgura que, sumada a la desigualdad en cuestión, la transforma en una ecuación diferencial. Seguiremos este procedimiento para la restricción b).

Si llamamos θ a esta nueva variable de holgura, tendremos que, según el procedimiento expuesto, la restricción b) puede expresarse como

$$C(t, Y) + \theta = 0 \qquad \text{para} \quad \theta \geqslant 0$$
$$C(t, Y) \leqslant 0$$

Esta expresión no es más que una función, que podemos denominar $\mathcal{G}$, de las variables t, Y y θ, de forma que

$$\mathcal{G}(t, Y, \theta) = C(t, Y) + \theta = 0 \qquad \text{para} \quad \theta \geqslant 0$$

Obsérvese que para algún conjunto (t, Y) que satisfaga la restricción b), existirá un θ tal que

$$\mathcal{G}(t, Y, \theta) = 0 \tag{2.57}$$

Consiguientemente, para algún (t, Y, θ) que satisfaga (2.57) ocurrirá que

$$C(t, Y) \leqslant 0$$

Por tanto, la restricción inicial b) es equivalente a la función (2.57).

Si en (2.57) fijamos algún θ e Y que la satisfagan, tendremos que σ será una función de t solamente y, por tanto, su derivada respecto a t será idénticamente nula, esto es:

$$\sigma_t + \sigma_Y . \dot{Y} + \sigma_\theta . \dot{\theta} = 0 \qquad (2.58)$$

o, lo que es lo mismo,

$$C_t + C_Y . \dot{Y} + \sigma_\theta . \dot{\theta} = 0 \qquad (2.58')$$

Es preciso recordar aquí las condiciones sobre continuidad que la nueva función $\sigma(.)$ debe satisfacer. Dado que la conversión de (2.57) en la ecuación diferencial (2.58) incorpora las derivadas primeras de (2.57) respecto a las variables y, por otro lado, al exigir a las funciones restricción del problema de Lagrange que tengan derivadas contínuas de segundo orden, θ tendrá que tener por lo menos derivadas contínuas de tercer orden. Esto no sería cierto si $\theta = 0$; por tanto, la variable de holgura es preciso que tenga al menos exponente cuatro.

Para compensar la falta de información al derivar, añadimos la información sobre la función en el punto inicial:

$$\sigma(t_o, Y(t_o), \theta(t_o)) = 0 \qquad (2.59)$$

y, por tanto, la restricción b) es equivalente al par de ecuaciones (2.58) y (2.59), o bien (2.58') y (2.59').

Al realizar estas transformaciones sobre las restricciones de igualdad y desigualdad, hemos transformado nuestro problema de control para poder ser resuelto como un caso particular del problema clásico, que utiliza la técnica de los multiplicadores de Lagrange (1).

Si al problema de control formulado en la sección anterior se añaden las restricciones a) y b), éste puede ser planteado de la siguiente forma:

---

(1) Véase Anexo A.- "Problema variacional con restricciones".

i) Dadas las condiciones extremas fijadas:

$$\begin{aligned} Y(t_o) &= Y_o \\ Y(t_1) &= Y_1 \end{aligned} \qquad (2.60)$$

ii) y las restricciones

$$\dot{Y} = G(t, Y, U) \qquad (2.61)$$

$$R(t, Y, U) \leq 0 \qquad (2.62)$$

$$C(t, Y) = 0 \qquad (2.63)$$

$$C(t, Y) \leq 0 \qquad (2.64)$$

iii) optimizar

$$I(Y,U) = \int_{t_o}^{t_1} F(t, Y, U)\, dt \qquad (2.65)$$

Como primera etapa en la resolución del problema anterior, hemos de eliminar las variables control, por ser funciones con un número finito de saltos, mediante la incorporación de un nuevo vector de variables "V" contínuas con esquinas, de forma que

$$\dot{V} = U(t) \qquad (2.66)$$

Este cambio de variables nos permite reformular el problema expuesto en los siguientes términos:

i) Determinar el vector de funciones contínuas con esquinas

$$Y^L(t) = [Y(t),\ V(t),\ P(t),\ \theta(t)]'$$

que maximiza

$$I(Y^L) = \int_{t_o}^{t_1} F(t,\ Y,\ \dot{V})\ dt \qquad (2.67)$$

ii) sujeto a las restricciones

$$G(t,\ Y,\ \dot{V}) = \dot{Y} \qquad (2.68)$$

$$R(t,\ Y,\ \dot{V}) + \dot{P}^2 = 0 \qquad (2.69)$$

$$C_t(t,\ Y) + C_Y(t,\ Y).\ \dot{Y} = 0 \qquad (2.70)$$

$$C_t(t,Y) + C_Y(t,Y).\dot{Y} + \sigma_\theta.\dot{\theta} = 0 \qquad (2.71)$$

iii) y donde la única información sobre las condiciones extremas viene dada por:

$$Y(t_o) = Y_o$$

$$C(t_o,\ Y(t_o)) = 0$$

$$\sigma(t_o,\ Y_o,\ \theta_o) = 0 \qquad (2.72)$$

$$Y(t_1) = Y_1$$

$$\sigma(t_1,\ Y_1,\ \theta_1) = 0$$

Por tanto, las variables V y P tienen límites libres y consiguientemente ésto ha de tenerse en cuenta en el estudio de la transversalidad.

Las restricciones (2.69), (2.70) y (2.71), que son sistemas de h, α y β ecuaciones diferenciales, han de cumplir una serie de condiciones (1) que

---

(1) Estas condiciones, para Hadley-Kemp (1971), se resumen en:

1) Si el número de restricciones de control (h) más el de restricciones de desigualdad estado (β) es mayor o igual que el número de variables de control (m), entonces, no más de (m-α) restricciones pueden ser activas en algún punto particular.

2) Sea (t, Y, U) alguna solución a:

$$R \leq 0 \qquad (i)$$
$$C(t, Y) = 0 \qquad (ii)$$
$$C(t, Y) \leq 0 \qquad (iii)$$

y sean k de (i) y (iii) activas.

Sea P una matriz m x (k+α) cuyas columnas son las $R_{\dot{V}}$ activas, y los vectores AC_Y de todas las restricciones estado a) y b) activas, donde A es una matriz cuyas columnas son las $G_{\dot{V}}$.

La condición que impondremos es que en cada punto donde k de las restricciones sean activas, P tenga rango (k+α).

Estas condiciones 1) y 2) nos conducen a la conclusión siguiente: Si 1) y 2) se satisfacen, entonces la matriz de derivadas (formada por el conjunto de todas las restricciones) respecto a cada función del vector Y^L, siendo Y^L:

$$\dot{Y}^L = [\dot{Y}(t), \dot{V}(t), \dot{P}(t), \dot{\theta}(t)]$$

es no singular para cada solución $(t, Y^L, \dot{Y}^L)$. Esto no es más que una exigencia del Problema clásico de Lagrange respecto al número de filas y columnas de esta matriz de derivadas. Las condiciones 1) y 2) nos indican que el número de filas (m+n+h+β) no puede ser mayor que el de columnas (n+h+α+β). Esto es, que el número de restricciones (ec.diferenciales) no puede ser mayor que el de variables en $\dot{Y}^L$ (esto es, que $\alpha \leq$ m).

garantizan la aplicabilidad de las técnicas clásicas de optimización al problema de control transformado. Este conjunto de condiciones viene a resumirse en que la matriz de derivadas parciales de todas las restricciones igualadas a cero respecto a cada elemento de $\dot{Y}^L$ sea no singular.

2.3.1. Las Condiciones Necesarias

El conjunto de condiciones necesarias que la función óptima $Y^L(t)$ debe satisfacer según la teoría clásica nos permitirá deducir a partir de las mismas las correspondientes al problema de control con restricciones de estado, entre las cuales se encuentra, como más tarde veremos, el Principio de Máximo.

La primera de las condiciones necesarias, la ecuación de Euler para el problema de Lagrange formulado en 2.3 por las ecuaciones (2.67) a (2.72), se deduce siguiendo los mismos pasos que para el problema de una sola variable se hace en el Anexo A.

La solución del problema parte de la existencia de un conjunto de multiplicadores

$$\left[\Lambda_i(t),\ \mu(t),\ \zeta(t),\ \delta(t)\right]$$

donde $\Lambda_i(t)$ es distinto de $\Lambda(t)$ (1), y donde

$$\left[\Lambda_i,\ \mu,\ \zeta,\ \delta\right] \neq 0 \quad \text{para cada } t.$$

---

(1) Con esta distinción queremos adelantar las modificaciones que sobre las variables auxiliares se dan por la existencia de restricciones de estado. Véase Russak (1976), Bercovitz (1962).

Cada multiplicador es una función contínua excepto en las esquinas de las funciones óptimas que integran Y^L.

Una vez introducidos los multiplicadores y recordadas sus características, pasamos a formar la función auxiliar de Lagrange correspondiente al problema (2.67) a (2.72). Dicha función responderá a la forma:

$$L = F(t,Y,\dot{V}) + \Lambda_i(t) \; (G-\dot{Y}) + \mu(t) \; [R(t,Y,\dot{V}) + \dot{P}^2] +$$
$$+ \zeta(t) \; [C_t(t,Y) + C_Y(t,Y).\dot{Y}] +$$
$$+ \delta(t) \; [C_t(t,Y) + C_Y(t,Y) + \varphi_\theta . \; \dot{\theta}] \qquad (2.73)$$

Volviendo a la condición necesaria que nos ocupa, la ecuación de Euler (1), tendremos que, si Y^L es el vector de funciones óptimas, entonces se habrá de cumplir que

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{Y}} L - L_Y L = 0 \qquad (2.74)$$

---

(1) Más que de ecuación, hemos de hablar de sistemas de ecuaciones

Estos sistemas de ecuaciones de Euler estarán formados por las correspondientes a cada elemento del vector $Y^L(t)$. Esto es,

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{Y}} - L_Y = 0 \qquad (2.74a)$$

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{V}} - L_V = 0 \qquad (2.74b)$$

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{P}} - L_P = 0 \qquad (2.74c)$$

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{\theta}} - L_{\theta} = 0 \qquad (2.74d)$$

Calculando las derivadas respectivas de cada uno de estos cuatro sistemas, tendremos para (2.74a):

$$L_{\dot{Y}} = - \Lambda_i(t) \qquad (2.75)$$

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{Y}} = - \dot{\Lambda}_i(t) \qquad (2.76)$$

donde, si $L_{\dot{Y}}$ es contínua por las condiciones de esquina de Weierstrass-Erdmann (1), $\dot{\Lambda}_i$ también lo será.

---

(1) Véase Condiciones de esquina de Weierstrass-Erdmann en Anexo A.

Por otro lado,

$$L_Y = F_Y + \Lambda_i(t).G_Y + \mu R_Y + \zeta(t)\frac{\partial}{\partial Y}(C_t + C_Y.G) +$$

$$+ \delta(t)\frac{\partial}{\partial Y}(C_t + C_Y.G + \sigma_\theta.\dot{\theta}) \qquad (2.77)$$

De aquí se deducirá que (2.74a) puede expresarse como:

$$- \dot{\Lambda}_i(t) = L_Y$$

$$-\dot{\Lambda}_i(t) = F_Y + \Lambda_i(t).G_Y + \mu(t).R_Y + \zeta(t)\frac{\partial}{\partial Y}(C_t+C_Y.G)$$

$$+ \delta(t)\frac{\partial}{\partial Y}(C_t + C_Y.G + \sigma_\theta.\dot{\theta}) =$$

$$= F_Y + \Lambda_i(t).G_Y + \mu(t).R_Y + \zeta(t)(C_{tY}+C_{YY}G+C_YG_Y) +$$

$$+ \delta(t)(C_{tY} + C_{YY}G + C_YG_Y) \qquad (2.78)$$

Haciendo lo mismo para el sistema (2.74b), tenemos:

$$L_{\dot V} = F_{\dot V} + \Lambda_i(t)\ G_{\dot V} + \mu(t)\ R_{\dot V} + \zeta(t)\frac{\partial}{\partial \dot V}(C_t + C_Y.G)$$

$$+ \delta(t)\frac{\partial}{\partial \dot V}\ (C_t + C_Y.G + \sigma_\theta.\dot\theta) =$$

$$= F_{\dot V} + \Lambda_i(t) G_{\dot V} + \mu(t) R_{\dot V} + \zeta(t)(C_Y G_{\dot V}) + \delta(t)(C_Y G_{\dot V})$$

(2.79)

Por otra parte,

$$L_V = 0 \tag{2.80}$$

Por tanto, si por (2.74b) se había de satisfacer

$$\frac{d}{dt} L_{\dot V} - L_V = 0$$

entonces, de (2.79) y (2.80) se sigue que

$$\frac{d}{dt}\left[F_{\dot V} + \Lambda_i(t) G_{\dot V} + \mu(t) R_{\dot V} + \zeta(t)(C_Y G_{\dot V}) + \delta(t)(C_Y G_{\dot V})\right] = 0$$

(2.81)

Lo que nos lleva a derivar desde (2.74b) que:

$$L_{\dot V} = \text{constante} \tag{2.82}$$

En cuanto al sistema (2.74c), los cálculos de las derivadas respectivas nos conducen a que, si

$$L_{\dot{P}} = 2\,\mu\,\dot{P} \qquad (2.83)$$

$$L_{P} = 0 \qquad (2.84)$$

y se ha de satisfacer (2.74c). Entonces,

$$L_{\dot{P}} = \text{constante} \qquad (2.85)$$

o, lo que es lo mismo,

$$2\,\mu\,\dot{P} = \text{constante} \qquad (2.86)$$

Por último, haciendo lo mismo para el sistema (2.74d), y teniendo en cuenta que éste sólo se mantendría para restricciones estado de la forma b), tendremos:

$$L_{\dot{\theta}} = \delta\,\sigma_{\theta} \qquad (2.87)$$

$$L_{\theta} = \delta\,\sigma_{\theta\theta}\,\dot{\theta} \qquad (2.88)$$

Por tanto, si (2.74d) ha de satisfacerse, entonces,

$$-\,\delta\,\sigma_{\theta\theta}\,\dot{\theta} + \dot{\delta}\,\sigma_{\theta} + \delta\,\sigma_{\theta\theta}\,\dot{\theta} = 0 \qquad (2.89)$$

lo que conduce a

$$\dot{\delta}\,\sigma_{\theta} = 0 \qquad (2.90)$$

Además, $L_{\dot{\theta}}$ es contínua ya que $\delta\,\sigma_{\theta}$ lo es.

Razonamientos análogos a los seguidos en la sección 2.2 nos permiten deducir un conjunto de condiciones adicionales derivadas de la transversalidad. Si de las condiciones extremas para el problema formulado por (2.67) a (2.72) se desprende que las variables V y P no tienen extremos fijados, entonces, por la condición de transversalidad tendremos que:

$$L_{\dot{V}} = 0 \tag{2.91}$$

$$L_{\dot{P}} = 0 \tag{2.92}$$

serán las condiciones adicionales. Ahora bien, si según (2.82) y (2.85)

$$L_{\dot{V}} = \text{constante}$$

$$L_{\dot{P}} = \text{constante}$$

o

entonces estas condiciones adicionales se traducen en:

$$F_{\dot{V}} + \Lambda(t)G_{\dot{V}} + \mu(t)R_{\dot{V}} + \zeta(t)(C_Y' G_{\dot{V}}) + \delta(t)(C_Y G_{\dot{V}}) = 0 \tag{2.93}$$

$$\mu \cdot \dot{P} = 0 \tag{2.94}$$

donde (2.94) puede expresarse (1) como:

$$\mu \,.\, R = 0 \quad , \quad \forall \mu \neq 0 \quad y \quad R \leq 0$$

Una vez estudiadas las ecuaciones de Euler, vamos a analizar otra importante condición necesaria clásica, la condición de Weierstrass. La importancia de esta condición desde el punto de vista de la moderna teoría del control radica fundamentalmente en que es a partir de ésta desde donde se obtiene el Principio de Máximo.

La condición necesaria de Weierstrass tal como se encuentra definida en el Anexo A viene a formularse para el caso que nos ocupa como (2):

$$E = L(t,\, Y^L,\, \dot{Z}) - L(t,\, Y^L,\, \dot{Y}^L) - (\dot{Z} - \dot{Y}^L)L_{\dot{Y}^L} \qquad (2.95)$$

---

(1) Véase la sección 2.2.- "Restricciones de Control"

(2) Un estudio más completo sobre esta función puede encontrarse en Hestenes (1966). La única variante está en que este autor estudia el problema cuando $G(t,\, Y,\, U) = U$.

Esta condición nos dice que si Y^L es el vector de variables óptimas (máximo), entonces E definido como en (2.95) debe ser semidefinida negativa, para un vector Z de variaciones admisibles respecto al óptimo (Y^L) que responde a:

$$Z = [Z(t),\ W(t),\ \phi(t),\ K(t)]'$$

y por tanto

$$\dot{Z} = [\dot{Z},\ \dot{W},\ \dot{\phi},\ \dot{K}]'$$

siendo Z un conjunto de funciones admisibles (1) que satisfacen los requisitos de continuidad exigidos a los componentes de Y^L.

Comencemos el estudio de la función (2.95) por su último sumando. Para ello tendremos en cuenta los resultados obtenidos en (2.75), (2.91), (2.92) y (2.87) respectivamente. En este sentido, el vector

$$- L_{\dot{Y}L} (\dot{Z} - \dot{Y}^L)$$

que se compone de los elementos: $L_{\dot{Y}}(\dot{Y} - \dot{Z})$, $L_{\dot{V}}(\dot{V} - \dot{W})$

---

(1) Con este término se quiere expresar que son funciones que satisfacen las mismas restricciones que las funciones de Y^L.

$L_{\dot{P}}(\dot{P} - \dot{\phi})$ y $L_{\dot{\theta}}(\dot{\theta} - \dot{K})$, puede transformarse mediante los resultados derivados en las cuatro expresiones citadas. Así,

$$L_{\dot{Y}}(\dot{Y} - \dot{Z}) = \Lambda_i \dot{Z} - \Lambda_i \dot{Y} \qquad (2.96)$$

ya que de (2.75) se sabe que $L_{\dot{Y}} = -\Lambda_i$.

$$L_{\dot{V}}\ (\dot{V} - \dot{W}) = 0 \qquad (2.97)$$

ya que de (2.91) se sabe que $L_{\dot{V}} = 0$.

$$L_{\dot{P}}(\dot{P} - \dot{\phi}) = 0 \qquad (2.98)$$

ya que desde (2.92) conocemos que $L_{\dot{P}} = 0$.

$$L_{\dot{\theta}}(\dot{\theta} - \dot{K}) = \delta\,\sigma_\theta\,\dot{\theta} - \delta\,\sigma_\theta\,\dot{K} \qquad (2.99)$$

que se deriva de (2.87), que $L_{\dot{\theta}} = \delta\sigma_\theta = 0$.

Respecto a la expresión (2.99), hemos de tener en cuenta que σ_θ sólo existe cuando se dan restricciones de desigualdad. En este sentido, la expresión (2.99) podrá adoptar las dos formas siguientes:

i) Si $C(t,Y) = 0$, entonces $\sigma_\theta = 0$, $L_{\dot{\theta}}(\dot{\theta} - \dot{K}) = 0$

ii) Si $C(t,Y) \leqslant 0$, entonces $\sigma_\theta \neq 0$,

$$L_{\dot{\theta}}(\dot{\theta} - \dot{K}) = \delta\,\sigma_\theta\dot{\theta} - \delta\,\sigma_\theta\dot{K}$$

Si tenemos en cuenta (2.58), (2.99) puede expresarse como:

$$L_{\dot{\theta}}(\dot{\theta} - \dot{K}) = \delta\left[-C_t - C_Y.G(t,Y,\dot{V})\right] - \delta\left[-C_t - C_Y.G(t,Y,\dot{W})\right]$$

A la vista de estas diferencias puede adelantarse que la función exceso de W definida en (2.95) variará según se trate de restricciones a) o b) y dentro de b) de soluciones límite (1) o interiores (2). Por esta razón, parece oportuno introducir las siguientes definiciones sobre lo que se entiende en Teoría del Control por segmento límite y segmento interior.

(1) Soluciones límite, o restricciones activas, se dan cuando

$$C(t, Y) = 0$$

(2) Soluciones interiores o restricciones no activas se presentan cuando

$$C(t, Y) < 0$$

2.3.1.1. Segmento interior

Supongamos ahora que no existen restricciones de estado del tipo a) y llamemos B al conjunto de todos los puntos (t, Y) que satisfacen las restricciones b). Como esta segunda forma de restricción respondía a la forma $C(t, Y) \leq 0$, se puede concluir que B será el conjunto de soluciones a las desigualdades.

Llamaremos a una solución (t, Y) un punto interior si ninguna de las restricciones es activa. La solución (t,Y) se llama punto límite si al menos una de las restricciones de la forma b) es activa, esto es, si al menos una de las restricciones b) es de igualdad. A la vista de estas puntualizaciones, se puede intuir que la trayectoria óptima de un problema de control descansará en unos intervalos de tiempo en el interior de B y en otros sobre el límite de B, y así hablar de segmentos interiores y segmentos límite.

Estudiaremos a continuación las condiciones necesarias que un segmento interior de la trayectoria óptima que podemos denominar S_1 debe satisfacer. Según los conceptos definidos en líneas anteriores, en cada punto de S_1 (no en los extremos) ninguna restricción estado será activa, y por tanto la expresión de la función exceso de Weierstrass responderá a la forma:

$$E = F(t,Y,\dot{W}) + \Lambda_i(t)\left[G(t,Y,\dot{W})-\dot{Z}\right] + \delta(t)\left[C_t+C_Y G+\sigma_\theta \dot{K}\right] -$$

$$- \{F(t,Y,\dot{V}) + \Lambda_i(t)\left[G(t,Y,\dot{V})-\dot{Y}\right]+\delta(t)\left[C_t+C_Y G+\sigma_\theta \dot{\theta}\right]\}$$

$$+ \Lambda_i.\dot{Z} - \Lambda_i.\dot{Y} - \delta\sigma_\theta.\dot{K} + \delta\sigma_\theta.\dot{\theta} \qquad (2.100)$$

Sacando factor común a $G(t,Y,\dot{W})$ y $G(t,Y,\dot{V})$ respectivamente, la función (2.100) quedaría:

$$E = F(t,Y,\dot{W}) + G(t,Y,\dot{W})\left[\Lambda_i(t)+\delta C_Y\right] - \Lambda_i\dot{Z}$$

$$+\delta\left[(C_t+\sigma_\theta\dot{K})\right] - \{F(t,Y,\dot{V}) + G(t,Y,\dot{V})\left[\Lambda_i(t)+\delta C_Y\right] -$$

$$- \Lambda_i\dot{Y} + \delta(C_t+\sigma_\theta\dot{\theta})\} + \Lambda_i\dot{Z} - \Lambda_i\dot{Y} - \delta\ _\theta\dot{K} + \delta\sigma_\theta\dot{\theta}$$

$$(2.101)$$

Restando y reordenando términos, obtenemos:

$$E = F(t,Y,\dot{W}) + G(t,Y,\dot{W})\left[\Lambda_i(t) + \delta C_Y\right] -$$

$$- \{F(t,Y,\dot{V}) + G(t,Y,\dot{V})\left[\Lambda_i(t) + \delta C_Y\right] \leqslant 0$$

$$(2.102)$$

que indica el valor de la función exceso de Weierstrass (2.95) a lo largo de un segmento interior, con $\mu.R = 0$ para $\mu \leqslant 0$ y $R \leqslant 0$.

Definiendo, según hace Hadley-Kemp, las funciones auxiliares para un segmento interior:

$$\Lambda(t) = \Lambda_i(t) + \delta(t).C_Y(t, Y) \qquad (2.103)$$

y llevando (2.103) a (2.102), esta última se transforma en:

$$E = F(\overset{o}{t},Y,\dot{W}) + G(t,Y,\dot{W})\Lambda(t) - F(t,Y,\dot{V}) - G(t,Y,\dot{V})\Lambda(t)$$

$$\leqslant 0 \qquad (2.104)$$

Si utilizamos la función Hamiltoniana definida en (1.9) como

$$H = F(t,Y,\dot{V}) + \Lambda(t).G(t,Y,\dot{V}) \qquad (2.105)$$

entonces la función exceso de W para un segmento interior será:

$$E = H(t,Y,\dot{W}) - H(t,Y,\dot{V}) \leqslant 0 \qquad (2.106)$$

o, lo que es lo mismo,

$$H(t, Y, \dot{V}) \geqslant H(t, Y, \dot{W})$$

para todo control perteneciente a $\overline{U}_p$ que satisface $R \leqslant 0$

que es la expresión del Principio del Máximo de Pontryagin a lo largo de un segmento interior, donde $\dot{V} = U$

es el control óptimo, y $\dot{W}$ es cualquier otro control admisible.

Para derivar el resto de condiciones necesarias correspondientes al problema de control formulado en (2.67) a (2.72), seguiremos los siguientes pasos:

Si desde (2.78) tenemos que:

$$- \Lambda_i(t) = L_{\dot{Y}}$$

y, por otro lado, en (2.103) hemos definido

$$\Lambda(t) = \Lambda_i(t) + \delta(t).C_Y$$

se puede, a partir de estas dos expresiones (2.78) y (2.103) determinar el sistema de las funciones auxiliares o adjuntas. Para ello, desde (2.103) se deduce que

$$\Lambda_i(t) = \Lambda(t) - \delta C_Y \qquad (2.108)$$

Derivando (2.108) respecto al tiempo, y despejando $\Lambda(t)$

$$\dot{\Lambda}(t) = \dot{\Lambda}_i + \dot{\delta}\, C_Y + \delta(C_{YY}.\dot{Y} + C_{tY}) \qquad (2.109)$$

Ahora bien, si nos movemos a lo largo de un segmento interior de la trayectoria óptima, por definición se cumple que

$$\sigma_\theta \neq 0$$

Además, sabemos desde (2.90) que

$$\dot{\delta}\,\sigma_\theta = 0$$

por tanto, se deduce que:

$$\dot{\delta} = 0 \qquad (2.110)$$

Sustituyendo (2.110) en el sistema dinámico de variables auxiliares (2.109), éste puede reescribirse como:

$$\dot{\Lambda} = \dot{\Lambda}_i + \delta(C_{tY} + C_{YY}.\dot{Y}) \qquad (2.111)$$

Si tenemos en cuenta la expresión (2.78), (2.111) es equivalente a:

$$-\dot{\Lambda} + \delta(C_{tY} + C_{YY}.\dot{Y}) = L_Y \qquad (2.112)$$

donde el valor de L_Y, una vez sustituído el valor de $\Lambda_i(t)$ por su valor en términos de $\Lambda(t)$, hace que (2.112) pueda expresarse como:

$$-\dot{\Lambda} + \delta(C_{tY} + C_{YY}\dot{Y}) = F_Y + \Lambda G_Y + \mu R_Y + \delta(C_{tY} + C_{YY}.\dot{Y}) \qquad (2.113)$$

donde, al anularse $\delta(C_{tY} + C_{YY}.\dot{Y})$ de los dos miembros de (2.113), esta expresión quedaría:

$$-\dot{\Lambda} = F_Y + \Lambda(t)\ G_Y + \mu.R_Y \qquad (2.114)$$

Poniendo (2.114) en términos de la función Hamiltoniana definida en (1. 9), tendremos:

$$-\dot{\Lambda} = H_Y + \mu.R_Y \qquad (2.115)$$

que es el sistema de ecuaciones que expresa la trayectoria temporal de las variables auxiliares para un problema de control con restricciones estado no activas.

Si utilizamos la función Hamiltoniana (H^*) definida en la sección de restricciones control, (2.115) será equivalente a:

$$-\dot{\Lambda} = H_Y^* \qquad (2.116)$$

Por último, si llevamos (2.103) a (2.79), esta última expresión es equivalente a:

$$L_{\dot V} = F_{\dot V} + |\Lambda(t) - \delta C_Y| G_{\dot V} + \mu(t) R_{\dot V} + \delta C_Y G_{\dot V} =$$

$$= F_{\dot V} + \Lambda(t) G_{\dot V} - \delta C_Y G_{\dot V} + \mu(t) R_{\dot V} + \delta C_Y G_{\dot V} =$$

$$= \{\text{como } \delta C_Y G_{\dot V} \text{ con signo más y menos se anula}\} =$$

$$= F_{\dot V} + \Lambda(t)\ G_{\dot V} + \mu(t)\ R_{\dot V} \qquad (2.117)$$

Si utilizamos la función Hamiltoniana definida en (1.9), (2.117) podrá expresarse como:

$$L_{\dot V} = H_{\dot V} + \mu\ R_{\dot V} = 0 \qquad (2.118)$$

o bien, en términos de la función H^* de la sección anterior, tendríamos que la condición necesaria $L_{\dot V} = 0$ nos lleva a:

$$H^*_{\dot V} = 0 \qquad (2.119)$$

condición idéntica a la obtenida en la sección 2.2, restricciones control. Si deshacemos el cambio de variables expresado por (2.66), (2.118) y (2.119) son equivalentes a:

$$H_U + \mu\ R_U = 0 \qquad (2.118')$$

$$H^*_U = 0 \qquad (2.119')$$

Si observarmos estas expresiones se comprueba que no son más que otra forma de expresar la condición de Principio de Máximo obtenida a partir de la función (2.106).

Tal como señalábamos al principio del apartado, a partir del problema clásico (de Lagrange) se han derivado las condiciones necesarias (que se plasman en las expresiones (2.116) a (2.119')) del problema de control formulado en (2.67) suponiendo restricciones estado no activas.

La condición de Principio de Máximo (2.106) ó (2.119') expresa que para unos valores dados de $\Lambda(t)$, $\mu(t)$ e $Y(t)$, la función evaluada vector $U(t) \in \bar{U}_p$, donde $\bar{U}_p$ está formado por todos los controles que son funciones contínuas a trozos y que satisfacen las h restricciones

$$r^i(t, Y, U) \leq 0 \qquad \forall i \;/\; i = 1, \ldots, h$$

maximiza la función Hamiltoniana H^* definida como

$$H^*(t,Y,U,\mu,\Lambda) = H(t,Y,U,\Lambda) + \mu \,.R$$

Para demostrar que $\Lambda(t)$ es contínua en un segmento interior, basta tener en cuenta las siguientes consideraciones:

i) Cuando las restricciones son inactivas, por (2.110) sabemos que entre las esquinas de la solución óptima $\dot{\delta} = 0$. Esto nos dice que entre las esquinas δ será una constante.

ii) Por otro lado, la variable θ es contínua, y de aquí σ_θ también lo será. Por las condiciones de esquina de Weierstrass-Erdmann la función $L_{\dot{\theta}}=\delta\sigma_\theta$ es contínua, y ésto garantiza la continuidad de δ

iii) Por tanto, si δ es una constante sobre el segmento interior y C_Y es contínua,desde (2.103) concluímos que $\Lambda(t)$ es contínua.

A las condiciones necesarias derivadas para un segmento interior de la trayectoria óptima falta añadir las condiciones adicionales derivadas de la transversalidad si el extremo final de la trayectoria óptima (un segmento interior) ha de terminar sobre una variedad alisada $\mathcal{M}$ descrita por las k hipersuperficies (1)

$$S^{i}\ (t,\ Y) = 0 \qquad \forall i\ /\ i = 1,\ \ldots,\ k$$

Además, supongamos que por las restricciones b) la función Y(t) debe terminar sobre la variedad $\mathcal{M}_b$ definida por

$$\sigma(y,\ Y,\ \theta) \ = \ 0$$

Así, para el tiempo final t_1 el punto $(t_1, Y^L(t_1))$ debe descansar sobre una determinada variedad $\mathcal{M}^*$ que sea la intersección de las correspondientes variedades $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}_b$. Entonces,

$$H_{\dot{Y}} = -\Lambda_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\ S_Y^j + \beta C_Y \qquad (2.120)$$

y

$$H_{\dot{\theta}} = \delta\ \sigma_\theta = \beta\ \sigma_\theta \qquad (2.121)$$

Como estamos en un segmento interior, entonces se seguirá que $\sigma_\theta \neq 0$ y $\delta = \beta$

---

(1) Un tratamiento bastante completo sobre puntos extremos libres que pueden descansar en una hipersuperficie se encuentra en Smith (1974).

Como desde (2.103) obtenemos que:

$$\Lambda(t) = \Lambda_i + \delta\, C_Y$$

entonces $\Lambda(t_1)$ debe ser ortogonal a $\mathcal{M}(t_1)$ en el punto $(t_1, Y(t_1))$.

2.3.1.2. Segmento límite

Fijémonos ahora en aquellos segmentos de la trayectoria óptima que están sobre el límite de B, siendo B el conjunto de soluciones (t, Y) que satisfacen la restricción

$$C(t, Y) \leq 0$$

Además, supongamos que también están presentes restricciones como a); esto es, de la forma

$$C(t, Y) = 0$$

Para facilitar la comprensión de este apartado, definamos los siguientes conjuntos:

Sea R_1 el conjunto de restricciones a) y sea R_2 el conjunto de restricciones b). Según esta distinción, R_2 estará formado por la unión de dos subconjuntos que podemos llamar R_{2+} y R_{2-} tales que

$$R_{2+} \cup R_{2-} = R_2$$

donde R_{2+} será el conjunto de restricciones activas en R_2 y R_{2-} el subconjunto de R_2 que recoge todas las restricciones no activas.

Vamos a centrarnos en el segmento S_2 de la trayectoria óptima (Y(t)) a lo largo del cual las restricciones de estado son activas.

Según las definiciones introducidas, para toda restricción perteneciente a la intersección

$$R_1 \cap R_{2+}$$

se verificará, según lo dicho para las restricciones b), que:

$$\sigma_\theta = 0 \tag{2.122}$$

Entonces, en esta situación, el último término de la expresión de Weierstrass (2.95) se verá modificado al ser (1):

$$L_{\dot{\theta}}(\dot{\theta} - \dot{K}) = 0 \tag{2.123}$$

Para calcular la condición necesaria de Principio de Máximo, haremos lo siguiente:

---

(1) Una prueba completa sobre las distintas formas de la función de Weierstrass según los diferentes tipos de restricciones se encuentra en Hestenes, op. cit.

Según la ecuación (2.78)

$$-\dot{\Lambda}_i = F_Y + \Lambda_i G_Y + \mu R_Y + \zeta\frac{\partial}{\partial Y}(C_t + C_Y.\dot{Y}) +$$

$$\delta\frac{\partial}{\partial Y}\left[(C_t + C_Y.\dot{Y} + C_t + C_Y.\dot{Y} + \sigma_\theta.\dot{\theta})\right]$$

$$= F_Y + \Lambda_i G_Y + \mu R_Y + \zeta\frac{\partial}{\partial Y}(C_t + C_Y.\dot{Y}) +$$

$$+ \delta\frac{\partial}{\partial Y}(C_t + C_Y.\dot{Y}) + \delta\frac{\partial}{\partial Y}(C_t + C_Y + \sigma_\theta.\dot{\theta})$$

(2.124)

y, por otro lado, según la expresión (1.112) conocemos que:

$$-\dot{\Lambda} + \delta(C_{tY} + C_{YY}.\dot{Y}) = -\dot{\Lambda}_i \qquad (2.125)$$

Como además hemos supuesto que no hay segmentos interiores o, lo que es lo mismo, sólo se dan restricciones activas, entonces el último término de (2.124) y el término en δ de (2.125) son cero , y por tanto, queda que:

$$-\dot{\Lambda} = F_Y + \Lambda G_Y + \mu R_Y + \zeta \frac{\partial}{\partial Y}(C_t + C_Y.\dot{Y}) +$$

$$\delta \frac{\partial}{\partial Y}(C_t + C_Y.\dot{Y}) \qquad (2.126)$$

o, en función de la Lagrangiana,

$$-\dot{\Lambda} = L_Y \qquad (2.127)$$

Si introducimos el valor de $\Lambda_i(t)$ en la función (2.93) llegamos a obtener

$$F_{\dot{V}} + \Lambda G_{\dot{V}} + \mu R_{\dot{V}} + \zeta(C_Y.G_{\dot{V}}) + \delta(C_Y.G_{\dot{V}}) = 0 \qquad (2.128)$$

que, en términos de la función Hamiltoniana H^* de la sección 2.2 se transforma en:

$$H^*_{\dot{V}} + \zeta(C_Y.G_{\dot{V}}) + \delta(C_Y.G_{\dot{V}}) = 0 \qquad (2.129)$$

Si deshacemos el cambio de variables (2.66), tendremos que (2.129) es igual a

$$H^*_U + \zeta(C_Y.G_U) + \delta(C_Y.G_U) = 0 \qquad (2.130)$$

Este sistema corresponde a la condición necesaria de Principio de Máximo para el caso de restricciones estado activas, expresando que para unos valores dados de Y, Λ, μ, ζ y δ la función $U(t)$maximiza la Lagrangiana L. Estas ecuaciones pueden resolverse únicamente para μ, ζ y δ en términos de los Λ_s', en cada punto en el tiempo. Por tanto, de esta forma se han obtenido un conjunto de condiciones necesarias que deben ser satisfechas a lo largo de un segmento límite (1). Resumiendo los resultados hasta ahora derivados, podemos enunciar el siguiente Teorema dado por Hadley-Kemp (1971):

Si en el problema de control con restricciones de estado hacemos el cambio de variables $\dot{V}(t) = U(t)$, en donde $U(t)$ hemos supuesto que es el control óptimo, sobre algún segmento S_2 de la trayectoria óptima $Y(t)$ a lo largo del cual las restricciones de desigualdad son activas, es necesario que exista una función contínua $\Lambda(t)$, una función contínua a

---

(1) A las mismas condiciones llega Balakrishnan (1969). El procedimiento utilizado es también la ecuación Euler-Lagrange como instrumento básico.

trozos $\mu(t)$ (siendo $\mu(t) \leq 0$ una función con un número finito de discontinuidades) y un conjunto de funciones contínuas a trozos $\zeta(t)$ y $\delta(t)$ de forma que $\delta(t)$ sólo existe para toda restricción activa, tal que si la función Hamiltoniana definida en (1.9) es

$$H = F + \Lambda . G$$

entonces $U(t)$, $Y(t)$, $\Lambda(t)$, $\mu(t)$, $\zeta(t)$ y $\delta(t)$ satisfacen los sistemas siguientes:

$$\dot{Y} = G$$

$$\dot{\Lambda} = - H_Y - \mu R_Y - \zeta \frac{\partial}{\partial Y}(C_t + C_Y . \dot{Y}) - \delta \frac{\partial}{\partial Y}(C_t + C_Y . \dot{Y})$$

$$\mu(t) . R = 0$$

$$H_U + \mu R_U + \zeta \frac{\partial}{\partial U}(C_t + C_Y . \dot{Y}) + \delta \frac{\partial}{\partial U}(C_t + C_Y . \dot{Y}) = 0$$

Consiguientemente, utilizando el criterio general del Principio del Máximo, tenemos que:

$$\mathcal{M}(t,Y,\Lambda) = \underset{U+\delta U \in \overline{U}_p}{\text{maximizar}} \; H(t,Y, U+\delta U,\Lambda)$$

donde $\overline{U}_p$ es el conjunto de todas las funciones de control que satisfacen

$$R(t, Y, U) \leq 0$$

Entonces,

$$H(t, Y, U, \Lambda) = \mathcal{M}(t, Y, \Lambda)$$

Llevando estos resultados al terreno de la analogía física utilizada en la introducción, se obtiene que efectivamente cuando hay restricciones estado activas, o lo que en el ejemplo físico se indicaba como que la pelota llega a rozar la pared, el sistema que expresa la trayectoria temporal de las variables auxiliares ($\dot{\Lambda}$) se ve modificado por los términos adicionales recogidos por ζ y δ, que indican la presencia de la pared o frontera.

Una vez estudiados los desarrollos teóricos asociados al problema de control con restricciones estado activas y no activas, parece oportuno detenernos, aunque sea de forma breve, en el análisis de las restricciones estado más frecuentes. En este sentido, podemos enfrentarnos a:

1) Que la condición sobre las variables de estado sea del tipo:

$$Y(t) \geq 0 \tag{2.131}$$

El proceso de solución de un problema de control con este tipo de condicionamientos sería:

- la restricción (2.131) es equivalente a:

$$C(t, Y) = - Y(t) \leqslant 0$$

y por tanto,

$$C_t + C_Y.\dot{Y} = - \dot{Y} \leqslant 0$$

- El paso inmediato sería la formación de la función auxiliar, que en este caso responderá a la forma:

$$L = F(t,Y,U) + \Lambda_i(t).G - \dot{\Lambda}_i.Y - \delta.\dot{Y}$$

- Las condiciones necesarias en este problema de maximización se concentran en

$$L_Y = F_Y + \Lambda_i.G_Y - \delta.G_Y = - \dot{\Lambda}_i$$

$$L_U = F_U + \Lambda_i.G_U - \delta.G_U = 0$$

- Si la restricción (a) es inactiva, esto es, Y(t)>0, entonces las condiciones anteriores se reducirían a que:

$$F_Y + (\Lambda_i - \delta)\ G_Y = - \dot{\Lambda}_i$$

que se traduce, según (2.103), en:

$$F_Y + \Lambda.G_Y = - \dot{\Lambda}$$

ya que $\dot{\delta}$= 0 en las restricciones inactivas.

En cuanto a la condición de Principio de Máximo, tendríamos:

$$F_U + \Lambda . G_U = 0$$

Como puede observarse, las dos condiciones son idénticas a las obtenidas en el Capítulo 1, capítulo en el que ningún tipo de restricciones de estado estaban presentes.

- Por el contrario, si el segmento estado óptimo descansa sobre el límite de la región permisible, entonces las condiciones necesarias correspondientes se verían modificadas:

$$F_Y + \Lambda . G_Y - \delta . G_Y = - \dot{\Lambda}$$

$$F_U + \Lambda . G_U - \delta . G_U = 0$$

2) Las restricciones estado terminales.

Supongamos ahora que tenemos el siguiente problema de control:

$$\text{Maximizar } I(Y, U) = \int_{t_o}^{t_1} F(t, Y, U)\, dt$$

sujeto a:

$$Y(t_o) = Y_o$$

$$Y(t_1) \leq 0$$

$$\dot{Y} = G(t, Y, U)$$

Cuando la única restricción sobre la variable de estado es una condición de no-positividad, es decir, del tipo:

$$Y(t_1) \leq 0$$

las condiciones $\delta(t_1).\left[C_t + C_Y.\dot{Y}\right]_{t=t_1}$

se transforman en $\delta(t_1).Y(t_1) = 0$

Sin embargo, dado que la restricción $Y(t_1) \leq 0$ es una simple restricción sobre el estado final Y(t), entonces se aplicarán las consideraciones sobre la transversalidad.

Por tanto, las observaciones correspondientes a la condición de transversalidad conducen a la expresión:

$$\lambda(t_1)\left[Y(t_1)\right] = 0$$

donde, como puede observarse, $\lambda(t_1)$ juega el papel de $\delta(t_1)$ en ese tiempo. La condición sobre el signo de $\lambda(t_1)$ vendrá expresada por:

$$\lambda(t_1) \leqslant 0 \quad \text{cuando} \quad Y(t_1) \leqslant 0 \quad (1)$$

Por último, vamos a considerar la condición de transversalidad en el supuesto en que la trayectoria óptima deba terminar en un punto $(t_1 \;\; Y(t_1))$ perteneciente a una determinada variedad alisada $\mathcal{M}$ generada por las k hipersuperficies

$$S^i(t, Y) = 0 \qquad \forall i \,/\, i = 1, \ldots, k$$

Supongamos también que el extremo final $(t_1, Y(t_1))$ satisface el conjunto de restricciones

$$c^i(t, Y) \qquad \forall i \,/\, i = 1, \ldots, \alpha$$

---

(1) Lo cual es fácilmente deducible en base a las condiciones de Khun-Tucker. El signo de los multiplicadores correspondientes a las formas diferentes de restricciones pueden asímismo determinarse a partir de tales condiciones. No obstante, es preciso señalar la importancia que tienen los signos de los términos que recogen la restricción en la función auxiliar. Estos últimos decidirán el signo del multiplicador correspondiente.

que generan una determinada variedad $\mathcal{M}_a$.

Además, está presente el conjunto de restricciones

$$\sigma(t, Y, \theta) = 0$$

que generan la variedad $\mathcal{M}_b$.

A la vista de estos supuestos, podemos concluir que, mediante la condición de transversalidad del Capítulo I, el extremo no especificado $(t_1, Y(t_1))$ debe descansar sobre una determinada variedad alisada que sea la intersección de $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_a$ y $\mathcal{M}_b$.

De la misma forma que para las restricciones anteriores, donde β es un vector de tantos elementos como restricciones $C(t,Y)$,

$$-\Lambda_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j S_Y^j + \underset{\{R_1\}}{\beta} \cdot C_Y + \underset{\{R_2\}}{\beta} \cdot C_Y$$

$$H_{\dot{\theta}} = \delta\, \sigma_\theta = \beta\, \sigma_\theta$$ (para restricciones de desigualdad)

Dado que $\sigma_\theta = 0$ para restricciones límite, se seguirá que

$$-\Lambda = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j S_Y^j + \underset{\{R_1 \cap R_{2+}\}}{\beta} C_Y$$

Si llamamos $\mathcal{M}^*(t_1)$ a la variedad alisada generada por $\sigma(t_1, Y) = 0$ para toda restricción perteneciente a R_1 ó a R_{2+} , entonces la condición de transversalidad se reduce a que $\Lambda(t_1)$ sea ortogonal a la variedad intersección de $\mathcal{M}(t_1)$ y $\mathcal{M}^*(t_1)$

Hasta aquí el estudio de las condiciones necesarias. El estudio de las condiciones suficientes no se realiza en esta sección por ser prácticamente igual al que se realiza en la sección 2.2.2., con restricciones sobre las variables de control.

2.3.2. Las Condiciones Adicionales de Transición

En la sección previa hemos derivado las condiciones de máximo que deben ser satisfechas a lo largo de un segmento interior y las que deben satisfacerse a lo largo de un segmento límite de la trayectoria óptima. A estas condiciones hay que añadir lo que Pontryagin denomina la condición conjugada, condición que debe satisfacerse por algún par de segmentos de la trayectoria óptima uno de los cuales descansa en el límite de la región estado y el otro en el interior. Denominaremos a ésta la condición de "jump" para la función auxiliar $\Lambda(t)$, que puede tener una discontinuidad en el instante en que la trayectoria de estado pasa de un segmento interior a uno límite (1).

Para el estudio de esta condición vamos a empezar definiendo lo que se entiende por una esquina de la trayectoria óptima.

---

(1) Para un análisis más completo sobre las condiciones de transición en las dos variedades mencionadas, puede acudirse a Berkovitz and Dryfus (1965) y Russak, B. (1976).

Un punto límite (t^* Y^*) de B se dice que es una esquina de la trayectoria Y(t) si:

$$Y(t^*) = Y^*$$

o bien si:

a) hay un $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto de restricciones que son activas en el intervalo $t^* - \varepsilon < t < t^*$ no es el mismo que el conjunto de restricciones que son activas en el intervalo $t^* < t < t^* + \varepsilon$

ó

b) Cuando R_1 es vacío, si todas las restricciones en L_2 son inactivas a la vez en $t^* - \varepsilon < t < t^*$ y en $t^* < t < t^* + \varepsilon$

donde t^* se denomina instante de transición.

Supondremos que siempre se consideran trayectorias con un número finito de esquinas.

Sea

$$\Lambda^-(t^*) = \lim_{t \to t^{-*}} \Lambda(t)$$

esto es, el límite de $\Lambda(t)$ cuando $t \to t^*$ por la izquierda, y por tanto:

$$\Lambda^+(t^*) = \lim_{t \to t^{*}} \Lambda(t)$$

Llamemos:

R_{2-}^{-} al conjunto de restricciones no activas a la izquierda de t^{*}, y

R_{2-}^{+} al conjunto de restricciones no activas a la derecha de t^{*}.

Entonces, si para un segmento interior hemos definido por (2.103) que

$$\Lambda(t) = \Lambda_i(t) + \delta(t).C_Y$$

y $\Lambda_i(t)$ es contínua a través de las esquinas por la condición de Weierstrass-Erdmann, se seguirá entonces que:

$$\Lambda^{-} - \delta(1^{-})\ C_Y^{'} = \Lambda^{+} - \delta(1^{+})\ C_Y \qquad (2.132)$$

donde 1^{-} y 1^{+} son restricciones inactivas a la izquierda y derecha de la esquina.

Esta condición que ha de satisfacerse en cada esquina se denomina condición de transición o de "jump".

Analicemos más detalladamente esta condición.

Por las consideraciones hechas sobre la continuidad de $\Lambda(t)$ sabemos que a lo largo de un segmento interior el multiplicador asociado a la restricción estado δ es contínuo.

Esto significa que

$$\delta^- = \delta^+$$

Por tanto, si la restricción pertenece al conjunto intersección

$$R^-_{2-} \qquad R^+_{2-}$$

los términos en δ de (2.132) se anulan, y la condición de "jump" se reduce a que $\Lambda^- = \Lambda^+$, lo cual es equivalente a decir que Λ es contínua a través del punto de junción.

Llamemos R^- al conjunto de restricciones que son inactivas a la izquierda de t^* pero que llegan a ser activas pasando por t^*. Esto es, sería el conjunto de restricciones de R^-_{2-} que no están en la intersección $R^-_{2-} \cap R_{2-}$,

y sea R^+ el conjunto de restricciones activas a la izquierda de t^* pero que se hacen inactivas al pasar por t^*.

Por tanto, desde (2.132) tendremos que:

$$\Lambda^- - \underset{\{l \in R^-\}}{\delta^-(l) \quad C_Y} = \Lambda^+ - \underset{\{l \in R^+\}}{\delta^+(l) \quad C_Y} \qquad (2.133)$$

Consideremos el caso en que R_1 es vacío y todas las restricciones en R_2 son inactivas a la vez a la derecha y a la izquierda de t^*, así que la trayectoria se mueve a través del interior hacia el límite en t^* y es entonces cuando vuelve de nuevo al interior. Entonces (2.133) se reduce a:

$$\Lambda^- = \Lambda^+$$

y por tanto Λ es contínua a través de una esquina.

Por último estudiaremos el caso en que a la izquierda de t^* las restricciones son inactivas, y a la derecha son activas. En estos casos, la condición de "jump" para la variable auxiliar se transforma en

$$\Lambda(t^{*-}) = \Lambda(t^{*+}) + \delta(t^{*+}).C_Y$$

CAPITULO 3

OTROS TEMAS DENTRO DE LA

TEORIA DE CONTROL OPTIMO

3.1. OTROS TEMAS DENTRO DE LA MODERNA TEORIA DEL CONTROL OPTIMO

Este Capítulo pretende ser un nexo de unión entre la primera parte del trabajo, dedicada al estudio de los principales elementos de la Teoría del Control Optimo, y la parte correspondiente a aplicaciones de problemas concretos de la realidad.

A nuestro juicio, la necesidad de este Capítulo se basa fundamentalmente en dos razones:

i) Existen elementos o matices que, sin ser indispensables de acuerdo con el planteamiento formal expuesto, no obstante, constituyen un marco de referencia obligado para distintas parcelas fundamentales de nuestra teoría.

ii) La primera parte de nuestro trabajo ha estado desligada de lo que en términos generales es la "interpretación económica de la teoría". Por ello parece conveniente acercar los relativamente abstractos planteamientos del Principio de Máximo a lo que se entiende por realidad económica.

El primer apartado de este Capítulo lo hemos denominado,en consonancia con lo anteriormente expuesto y siguiendo el título del conocido artículo de Dorfman (1), "Una interpretación económica del Principio de Máximo". En el mismo, y siguiendo el esquema del mencionado artículo, se plantea un problema de optimización dinámica intentando extraer de la exposición aquellos aspectos que pueden arrojar mayor claridad de cara a nuestro modelo empírico. El esquema seguido en dicho apartado es analizar sucesivamente y procurando seguir un cierto orden los distintos elementos que configuran el ámbito más puramente económico del tema.

El segundo apartado responde a la denominación de "Problema de control lineal". Se trata en el mismo de hacer una descripción, lo más exhaustiva posible dentro de lo que son los límites de este trabajo, de dicha modalidad de control. Aunque en un planteamiento original de este trabajo no nos parecía que mereciera una atención tan amplia como la que realmente se le dedica, hay que aclarar que dicha modificación vino determinada por los resultados obtenidos en la parte empírica de este trabajo.

(1) Dorfman (1969)

Adelantándonos al contenido de dicho apartado podemos resaltar las dos peculiaridades más importantes de esta modalidad de control: el hecho de que las condiciones necesarias de optimalidad son suficientes y, por otro, el fenómeno de los valores extremos. Dentro del problema lineal haremos unas consideraciones al caso lineal y cuadrático. La importancia de estos problemas reside por un lado en que determinan automáticamente controles "feedback" y, por otro, en la posibilidad de solucionar tales problemas por las técnicas de la Programación Dinámica.

Por último, se intenta hacer un análisis comparativo del Principio de Máximo con las dos aproximaciones al problema de control, que pueden considerarse en determinados problemas alternativas a aquél: Cálculo de Variaciones y Programación Dinámica.

Para llevar a cabo esta comparación el enfoque metodológico parte de un problema en términos de cada una de las dos aproximaciones, para alcanzar mediante sucesivas matizaciones teóricas las condiciones necesarias de optimalidad del Principio de Máximo de Pontryagin.

3.2. INTERPRETACION ECONOMICA DEL PRINCIPIO DE MAXIMO

En este apartado nuestro interés se centra en examinar la interpretación económica de los resultados obtenidos en los capítulos previos. ¿Qué sentido económico tiene la Hamiltoniana H en el Principio de Máximo? ¿Qué interpretación económica se encierra en los sistemas dinámicos de las variables auxiliares? ¿Cuál es la significación de las variables coestado? A intentar responder a estas preguntas se dedica este apartado.

Vamos a intentar extraer la significación económica del modelo puramente matemático planteado en los Capítulos I y II a partir del modelo utilizado por Dorfman y sirviéndonos también como referencia de otros modelos de control óptimo (1).

Supongamos, tal como hace el autor, una empresa que dispone de un determinado stock de capital "y" (en nuestra formulación el stock de capital es el es-

---

(1) Dorfman (1969). El problema económico seleccionado por el autor es bastante representativo de las aplicaciones de la moderna Teoría del Control a la economía: la empresa maximizadora de beneficios. Otros modelos de control óptimo son los realizados por Takayama (1974), Intriligator (1964), Johansen (1967) entre otros.

tado) y que dese maximizar los beneficios sobre un determinado período temporal $[t_o \quad t_1]$ mediante la elección de una decisión óptima U(t) (en términos del Capítulo I, U(t) es la función de control). A la vista de este planteamiento el funcional objetivo de la empresa respondería a la forma

$$I(Y,U) = \int_{t_o}^{t_1} F(t, y, U)\, dt \qquad (3.1)$$

donde (3.1) expresa los beneficios que la empresa puede obtener en el intervalo especificado. El integrando del funcional objetivo F(...) es la tasa de beneficios instantánea, obtenida como resultado de una determinada decisión (o control) "U" y un stock de capital "y".

Se supone que la empresa es libre para elegir sus decisiones (o, lo que es lo mismo, las variables de control U no están sometidas a restricciones), pero ha de supeditarse al stock de capital disponible y en cada instante del tiempo. Por tanto, la restricción o ecuación dinámica del estado ($\dot{y}$) expresará que la tasa de cambio del stock de capital en algún instante es una función del stock presente, del tiempo y de la decisión, esto es,

$$\dot{y} = g(t, y, U) \qquad (3.2)$$

Por tanto, las decisiones tomadas en algún tiempo tienen un doble efecto: por un lado, influir sobre la función integrando de (3.1), es decir, sobre la tasa a la que se obtienen los beneficios en ese tiempo t, y, por otro, sobre la ecuación dinámica o ecuación que expresa la tasa a la que está variando el stock de capital.

Las dos fórmulas expuestas (3.1) y (3.2) expresan la esencia del problema de tomar decisiones en un contexto dinámico. El problema será, de acuerdo con nuestro planteamiento, seleccionar el sendero temporal óptimo de la variable control o decisión U(t) que haga (3.1) lo mayor posible.

El problema de optimización planteado es resuelto por Dorfman utilizando el principio de optimalidad de Bellman junto al razonamiento económico (1). Lo realmente meritorio de su trabajo es llegar a obtener a partir de los instrumentos comentados condiciones necesarias análogas a las obtenidas utilizando el Principio de Máximo.

---

(1) Véase Dorfman, op. cit., pág. 819.

Estos resultados permiten extraer el gran surtido económico de las condiciones necesarias del Principio de Máximo. En este sentido, se enfrenta a una función Hamiltoniana:

$$H = F(t,y,U) + \lambda(t).g(t,y,U) \qquad (3.3)$$

que interpreta como una función de gran significado económico. Para demostrarlo utiliza el siguiente argumento:

Imaginemos que H está multiplicada por un intervalo temporal Δ , entonces la expresión

$$H.\Delta = F(t,y,U)\ \Delta + \lambda(t).g(t,y,U)\ \Delta \qquad (3.4)$$

será la suma de, por un lado, los beneficios obtenidos en el intervalo $(F.\Delta)$ más, por otro, la acumulación de capital durante el intervalo evaluado en su valor marginal $(\lambda.g.\Delta)$.

Entonces $H.\Delta$ será la contribución total de las actividades productivas durante el intervalo. Esto es, será la suma de lo que podemos denominar "contribución directa al funcional objetivo" expresada por $F.\Delta$ más el valor del capital acumulado durante el período $\lambda.\dot{y}.\Delta$, conocido normalmente como"contribución indirecta".

Esta interpretación de la Hamiltoniana ayuda a comprender la idea de por qué debe maximizarse esta función en cada t. La razón es obvia; si sólo maximizaramos la tasa de beneficios F(t,y,U) no estaríamos optimizando el funcional I de (3.1), ya que estaríamos ignorando el efecto que tienen las decisiones U(t) sobre el stock de capital (esto es, dejaríamos fuera de cómputo la contribución indirecta). La interpretación en este modelo de $\lambda(t)$ como valor marginal del capital es obvia. Es por ésto por lo que al hablar de $\lambda.\dot{y}.\Delta$ hablamos de valoración de la contribución indirecta, ya que λ desempeña el papel de precio sombra del capital.

Siguiendo con el resto de elementos que aparecen en su modelo, llega a obtener las condiciones (1):

$$\frac{\partial F}{\partial U} + \frac{\partial g}{\partial U} = 0 \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} + \dot{\lambda} = 0 \tag{3.6}$$

---

(1) Obtenidas a partir del más elemental de los criterios de maximización, parciales de una función auxiliar iguales a cero.

Ahora bien, estas dos expresiones, junto a la ecuación que nos da la variación del stock de capital, no son más que expresiones idénticas a las obtenidas en la Teoría del Control Optimo utilizando el Principio de Máximo. Por tanto, la interpretación de las mismas desde un punto de vista económico nos aportará la información necesaria para la interpretación del Principio de Máximo no sólo para problemas como el formulado, sino para otro tipo de cuestiones donde ni el stock de capital ni su valor sean las variables de estado y auxiliar.

En este sentido la ecuación (3.6) analizada en términos económicos expresa que la variable de decisión o de control que se selecciona en cada instante es aquélla que hace que las ganancias de capital inmediatas sean iguales al valor de la contribución marginal a la acumulación de capital. Por otro lado, (3.6) expresa que el capital se deprecia a la misma tasa con que contribuye a la obtención del output.

Por último, la ecuación (3.2) especifica cómo el stock de capital crece en cada instante $t \in [t_o \; t_1]$ como resultado de un determinado capital (y) y de las decisiones realizadas (U).

Reescribiendo las tres expresiones anteriormente comentadas en términos de la función Hamiltoniana H, tendremos:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{y} \qquad (3.2')$$

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0 \qquad (3.5')$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = - \dot{\lambda} \qquad (3.6')$$

Estas tres ecuaciones conjuntamente determinan los senderos temporales de las variables estado, control y coestado (por supuesto junto a las condiciones extremas). Así, (3.5) con "y" y "λ" conocidos determina el valor de la variable de control. Llevando este valor a (3.2) se determina $\dot{y}$ y; por último, llevando este valor a (3.6) obtenemos $\dot{\lambda}$. Si el proceso se vuelve a repetir sucesivamente, podemos, a partir de un dato parcial (t_o), conocer los senderos temporales hasta t_1 de las tres variables.

La interpretación económica del problema de Dorfman es por sí sola representativa del alto contenido económico del Principio de Máximo. No obstante, queda por estudiar el papel que desde el punto de vis ta de la Teoría económica juegan otros elementos, como son las condiciones extremas y las variables auxiliares.

Respecto a las primeras, la interpretación económica de las mismas es obvia, ya que una condición inicial como $y(t_o) = y_o$ simplemente describe el estado del sistema en el momento inicial. Esto es, la persona encargada de llevar a cabo el programa de optimización dispone, como información de partida, del stock de capital en el instante $t = 0$. Lo mismo puede decirse sobre la otra condición extrema, $y(t_1) = y_1$, donde la única variante está en el tiempo.

No obstante, se presentan algunas variantes en la interpretación de estas condiciones. Estas se dan precisamente cuando alguna de las dos condiciones extremas son variables. En estos casos el contenido económico viene implícito en la definición de las condiciones terminales de las variables auxiliares.

Una vez realizada esta primera parte, el autor se detiene a comparar los resultados obtenidos con las condiciones necesarias expuestas por Pontryagin. En este sentido, observa que realmente la divergencia se da entre la ecuación (3.5) y la correspondiente en la formulación del Principio de Máximo. La razón de esta divergencia es la siguiente: Si imponemos en el problema formulado al principio una condición de desigualdad sobre las variables de control, la condición de optimalidad se expresa como:

$$\underset{U \in \overline{U}_p}{\text{maximizar}}\ H(t,y,U,\lambda) = \mathcal{M}(t,y,\lambda)$$

siendo $\overline{U}_p$ el conjunto de funciones de control que satisfacen la restricción de desigualdad correspondiente, y por tanto la variable de control óptima puede ser un punto de la frontera de $\overline{U}_p$, y la condición utilizada por Dorfman en (3.5) de derivadas parciales iguales a cero no sirve. Y no sirve porque este procedimiento sólo determina soluciones interiores.

Retomando los planteamientos de Dorfman, es interesante destacar las dificultades que hacen ineficaz el criterio de maximización utilizado.

Son tres según Dorfman las complicaciones que hacen inadecuado el método de derivadas parciales iguales a cero como procedimiento para determinar un máximo:

a) La existencia de otras condiciones -las de orden superior- para distinguir un máximo de un mínimo.

b) Aunque se satisfagan las condiciones de orden superior, éstas sólo determinan extremos locales.

c) El máximo puede darse en algún punto donde las derivadas parciales no son cero, como ocurre en las soluciones límite en las variables de control.

De estos inconvenientes se puede colegir que la condición fundamental para localizar un óptimo es la maximización de la función Hamiltoniana en todos los puntos del tiempo, y que la condición

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0 \qquad (3.7)$$

es sólo un procedimiento, no eficaz en todos los casos, para localizar un máximo. En este sentido, el problema de maximizar la Hamiltoniana puede considerarse como un problema estático en cada t. Esto es, el Principio de Máximo descompone el problema de maximización dinámico en una serie de problemas de maximización estáticos en cada $t \in [t_o, t_1]$

Una vez hecha una revisión a nivel económico de las condiciones necesarias del Principio de Máximo, queda analizar el papel desempeñado por las variables auxiliares.

En los párrafos siguientes se estudia el papel que, desde el punto de vista económico, desempeñan las variables coestado o auxiliares. Estas variables, asociadas a las restricciones en los problemas de control, no son más que los análogos dinámicos de los multiplicadores de Lagrange en la optimización dinámica (1).

En los problemas de maximización (o minimización) utilizando la técnica de Lagrange es bastante frecuente considerar a los multiplicadores como tasas marginales de cambio de una cantidad respecto a otra (2). Así, una vez determinado el valor óptimo de la la función de control, se puede deducir a partir de los multiplicadores cómo variará el valor óptimo del funcional objetivo respecto a ciertos cambios en el modelo dinámico (o sistema de ecuaciones de movimiento).

---

(1) Un tratamiento clásico de estos elementos puede encontrarse en el completo trabajo de McShane (1939).

(2) Véase Dorfman, op. cit.

El estudio de las variables auxiliares que se realizará a continuación sigue en lo fundamental los tratamientos de Peterson (1973), Intriligator (1973) y Bensoussan (1974).

El punto central en Peterson es que la interpretación de los multiplicadores de Lagrange como tasas marginales de cambio, que se deriva de la programación no lineal, es perfectamente aplicable a las variables auxiliares del Principio de Máximo (1).(Hipótesis aceptada y utilizada entre otros por: Dorfman (1969), Lee y Markus (1972), Bensoussan (1974) para tiempo contínuo, y Benavie (1973) y Chow (1975) para tiempo discreto).

Básicamente estos autores interpretan las funciones auxiliares $\Lambda(t)$ como "precios-sombra" o "pseudoprecios", que no es otra cosa que el resultado de aplicar la programación matemática a la teoría del control, con la particularidad de que las variables auxiliares en la teoría del control son funciones del tiempo.

---

(1) Véase Benavie (1973).

Vamos pues a comenzar el estudio de estas variables viendo en primer lugar la interpretación de los multiplicadores de Lagrange en un problema de programación no lineal, para después analizar la similitud con las variables auxiliares del Principio de Máximo.

Supongamos el siguiente problema de programación no lineal (PNL):

i) Maximizar la función f(x) con respecto a la variable x (denominada en términos de la PNL variable instrumento), que pertenece a un conjunto X (1) que a su vez está contenido en E^n,

ii) sujeta a la restricción:

$$g(x) \leq b \tag{3.8}$$

siendo f, g, b, n y X generalmente conocidos, y donde a la vista del problema formulado el objetivo es determinar un valor de x, x^*, que llamaremos óptimo.

---

(1) Llamado en PNL conjunto de oportunidades. Véase Intriligator (1974).

Un valor de x, x^*, es un óptimo en PNL si satisface:

$$x^* \in X \tag{3.9}$$

$$g(x^*) \leq b \tag{3.10}$$

$$f(x^*) \geq f(x) \tag{3.11}$$

siendo f y g diferenciables.

Si existe x^* entonces, vía las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker, existe un $\lambda^* \in E^m$, siendo $\lambda^* \geqslant 0$, tal que:

i) $\text{grad. } f(x^*) - \lambda^* \text{grad. } g(x^*) \leq 0$ (3.12)

ii) $\lambda^* \left[g(x^*) - b\right] = 0$ (3.13)

Como el valor de la función auxiliar implícita $\left[L(x,\lambda) = f(x) - \lambda\left[g(x) - b\right]\right]$ para la solución $L(x^*,\lambda^*)$ es simplemente el valor óptimo de la función objetivo, esto es,

$$L(x^*,\lambda^*) = f(x^*) - \lambda^*\left[g(x^*) - b\right] =$$

$$= f(x^*) \tag{3.14}$$

Es fácilmente derivable que los multiplicadores de Lagrange para este problema pueden interpretarse como los cambios que se producen en el valor óptimo de la función objetivo al variar las constantes de restricción, esto es:

$$\lambda^* = \frac{\partial f^*}{\partial b} \tag{3.15}$$

Para demostrar (3.15) se debe primero mostrar que si las b son tratadas como variables es entonces posible resolver las x y λ como funciones de las b, y luego derivar con respecto a esas constantes (1).

Tal como se ha mostrado, los multiplicadores en PNL se interpretan como tasas de cambio del funcional óptimo con respecto a cambios en la restricción. Veremos a continuación cómo tal interpretación es perfectamente aplicable a lo que se denominan "funciones auxiliares" en la Teoría del Control Optimo.

Para comprobar esta afirmación vamos a estudiar una serie de problemas de control en los que distintas restricciones para cada uno de ellos nos irán

---

(1) Véase Intriligator, op. cit.: "Condiciones Kuhn-Tucker".

confirmando la interpretación enunciada. Supondremos en todos ellos que las funciones integrantes satisfacen las condiciones de concavidad o convexidad y que, por tanto, según el criterio de suficiencia de Mangasarian (1), las condiciones necesarias del Principio de Máximo son suficientes.

Sea el problema de control siguiente:

i) Maximizar el funcional

$$I = \int_{t_o}^{t_1} F(t,Y,U)\ dt \tag{3.16}$$

ii) con las restricciones:

$$\dot{Y} = G(t,Y,U) \tag{3.17}$$

$$Y(t_o) = Y_o \tag{3.18}$$

t_1

siendo Y_1 libre.

Para este problema las condiciones necesarias de Pontryagin conducen a:

(1) Véase Mangasarian (1966).

$$H = F(t,Y,U) + \Lambda . G(t,Y,U) \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial H}{\partial U} = F_U - \Lambda . G_U = 0 \tag{3.21}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial Y} = - F_Y - \Lambda . G_Y = \dot{\Lambda} \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \Lambda} = G(t,Y,U) = \dot{Y} \tag{3.23}$$

con

$$\Lambda(t_1) = 0 \quad y \quad Y(t_o) = Y_o \tag{3.24}$$

Si la función objetivo ampliada es para este problema:

$$I^* = \int_{t_o}^{t_1} [H + \dot{\Lambda}Y]dt - [\Lambda(t_1)Y(t_1) - \Lambda(t_o)Y(t_o)] \tag{3.25}$$

la variable coestado $\Lambda(t_o)$ nos daría la tasa marginal de cambio del valor máximo del funcional objetivo ante una variación de Y_o. En este sentido, la interpretación de la variable $\Lambda(t_o)$ como "pseudoprecio" o "tasa marginal" es correcta.

Además, si tal como Peterson (1973) señala la expresión que nos da el sistema dinámico se ve perturbada por alguna acción externa y se transforma en:

$$\dot{Y} = G(t,Y,U) + \varepsilon . h(t,U,Y) \tag{3.26}$$

entonces la tasa a la cual el valor máximo alcanzable de la función objetivo cambia con ε, cuando ε aumenta desde t_o, esto es,

$$\int_{t_o}^{t_1} \Lambda .\ h(t,Y,U)\ dt \qquad (3.27)$$

Bajo la primera interpretación, solamente $\Lambda(t_o)$ tiene el significado de tasa de cambio de una variación con respecto a otra. En el segundo supuesto, la función total Λ tiene significado como tasa de cambio pero respecto a un conjunto de cambios recogidos en la perturbación $\Lambda .h(t,Y,U)$ de la ecuación de transición.

Dentro del problema formulado cabe una interpretación adicional, y es cuando por alguna razón $Y(t_o)$ fuera alterado exógenamente por una cantidad ε. Entonces la tasa marginal de cambio del funcional óptimo respecto a ε sería $\Lambda(t_o)$. Como se puede ver, esta interpretación es similar a la primera.

Supongamos ahora que al problema de control planteado le imponemos una restricción control del tipo (2.1); entonces tendremos el siguiente problema:

$$\text{i) Maximizar } I = \int_{t_o}^{t_1} F(t,Y,U)\, dt \qquad (3.28)$$

ii) sujeto a:

$$\dot{Y} = G(t,Y,U) \qquad (3.29)$$

$$U(t) \geq Y(t) \qquad (3.30)$$

con

$$Y(t_o) = Y_o \quad \text{y } t_1 \text{ especificados.} \qquad (3.31)$$

Para este problema las condiciones necesarias de Pontryagin expuestas en el Capítulo II nos conducen a:

$$H = F(t,Y,U) + \Lambda . G(t,Y,U) + \mu\left[Y(t)-U(t)\right] \qquad (3.32)$$

$$\frac{\partial H}{\partial U} = F_U \quad \Lambda . G_U \quad \mu = 0 \qquad (3.33)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial Y} = - F_Y - \Lambda . G_Y - \mu = \dot{\Lambda} \qquad (3.34)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \Lambda} = G(t,Y,U) = \dot{Y} \qquad (3.35)$$

con las condiciones adicionales:

a) $\left[Y(t)-U(t)\right] \leq 0$, siendo $\mu \leq 0$, $\mu(Y-U) = 0$ (3.36)

b) $\Lambda(t_1) = 0$ y $Y(t_o) = Y_o$ (3.37)

Para este problema, la interpretación de las λ's es como en los casos anteriores. Vamos a fijarnos en U(t).

Supongamos que la restricción sobre la función control se ve alterada, pasando a ser:

$$\left[Y(t)-U(t)\right] + \varepsilon\cdot\psi(t,Y,U) \leqslant 0 \qquad (3.38)$$

entonces la tasa de cambio del valor máximo alcanzable del funcional objetivo con respecto a ε (cuando ε se incrementa desde t_o) es:

$$-\int_{t_o}^{t_1} \mu\cdot\psi(t,Y,U)\,dt \qquad (3.39)$$

La interpretación de μ como tasa de cambio está permitida si la perturbación $\psi(t,Y,U)$ es convexa en las variables estado y control (1). Si llamamos I^1 al funcional objetivo maximizado antes de la perturbación, e I^2 al funcional objetivo óptimo una vez se modifica la restricción sobre las variables de control, tendremos que:

---

(1) Ya que μ ha de ser menor o igual a cero.

$$I^1 - \int_{t_o}^{t_1} \mu \cdot \psi(t,Y,U)\, dt \geq I^2 \qquad (3.40)$$

Supongamos ahora que en el problema que estamos manejando añadimos una restricción sobre el estado terminal del tipo

$$Y(t_1) \geq m \qquad (3.41)$$

donde m es una constante.

Entonces tendremos que las condiciones necesarias derivadas del Principio de Máximo sólo se verán alteradas en dos aspectos:

a) La restricción en sí misma $Y(t_1) \geq m$

b) La no presencia de la condición adicional derivada de la transversalidad.

Si acudimos a la expresión dada en el Capítulo I para la función objetivo modificada y observamos esta nueva restricción, podemos afirmar que el valor del vector $\Lambda(t_1)$ mide la sensibilidad del valor óptimo de ese funcional óptimo respecto a la elección de la constante m (1). Más concretamente, la tasa marginal del incremento del funcional óptimo máximo alcan-

---

(1) Véase Bertrand (1979).

zable con un incremento en m es $-\Lambda(t_1)$. Consiguientemente, si m varía pasando a ser $m + \Delta$ y si I^1 y I^2 indican los funcionales óptimos antes y después de la variación, tendremos que:

$$I^1 + \Lambda(t_1).\Delta \geq I^2 \tag{3.42}$$

Por tanto se ha vuelto a comprobar cómo las variables auxiliares actúan como tasas marginales.

Las interpretaciones discutidas pueden generalizarse, siguiendo a Peterson, en forma de Teoremas de sensibilidad (1).

Antes de concretar las conclusiones en forma de teoremas, vamos a definir una familia de problemas de control. Esta familia viene expresada por:

i) Un objetivo: Maximizar

$$I(Y,U) = \int_{t_o}^{t_1} F(t,Y,U)\, dt \tag{3.43}$$

(1) Peterson, op. cit.

ii) con las condiciones:

$$\dot{Y} = G(t,Y,U) + \varepsilon\, h(t,Y,U) \quad (3.44)$$

$$R(t,Y,U) + \varepsilon\, \psi(t,Y,U) \leqslant 0 \quad (3.45)$$

$$Y(t_o) = Y_o + \varepsilon\phi \ ; \ Y(t_1) \geqslant m + \varepsilon\zeta \quad (3.46)$$

donde h y ψ son funciones contínuas y ϕ y ζ son números reales.

Como puede observarse, para $\varepsilon = 0$, obtenemos como caso particular el problema estudiado en páginas anteriores.

Supongamos que para cada valor de ε, incluído el valor cero, existen unas funciones $Y^*(t,\varepsilon)$, $\Lambda^*(t,\varepsilon)$ $U^*(t,\varepsilon)$ y $\mu^*(t,\varepsilon)$ donde el asterisco expresa valores óptimos, que satisfacen las condiciones necesarias de Pontryagin, esto es, satisfacen:

1) $H(t,Y,U,\Lambda,\mu,\varepsilon,) = F + \Lambda(G + \varepsilon h) - \mu(R + \varepsilon\psi)$

$$(3.47)$$

2) μ es una función contínua a trozos en t, y satisface

$$\mu(R + \varepsilon\psi) = 0, \quad \forall t \quad [t_o , t_1] \quad (3.48)$$

3) $\Lambda(t, 0)$ es contínua en t y tiene derivadas primeras contínuas a trozos.

4) $U(t, 0)$ es una función contínua a trozos y sobre cada intervalo de continuidad se satisfacen las ecuaciones:

$$\dot{Y} = \frac{\partial H}{\partial \Lambda} \qquad \dot{\Lambda} = -\frac{\partial H}{\partial Y} \qquad \frac{\partial H}{\partial U} = 0 \qquad (3.49)$$

(con $\varepsilon = 0$).

5) La condición de transversalidad

$$\Lambda(t_1,\varepsilon)\left[Y(t_1,\varepsilon) - m(\varepsilon)\right] = 0 \qquad (3.50)$$

se mantiene.

<u>TEOREMA 1</u>.-

Si $U^{*}(t,\varepsilon)$ es una solución al problema de control con el parámetro ε, entonces:

$$\frac{d}{d\varepsilon} I[U^{*}(t,\varepsilon)',\varepsilon]\bigg|_{\varepsilon=0} = \int_{t_o}^{t_1} \Lambda^{*}(t,0)\; h(t,Y^{*},U^{*})\; dt - \\ - \int_{t_o}^{t_1} \mu^{*}(t,0)\; \psi(t,Y^{*},U^{*})\; dt - \\ - \Lambda^{*}(t_1,0)\zeta + \Lambda^{*}(t_o,0)\phi \qquad (3.51)$$

Supongamos ahora que $H(t,Y,U,\Lambda,\mu,\varepsilon)$ es cóncava en las variables de estado y de control, y que $(t,\varepsilon) \geq 0$.

TEOREMA 2.-

Bajo los supuestos anteriores, $U^*(t,\varepsilon)$ es una solución al problema de control con el parámetro ε, y

$$I[U^*(t,\varepsilon);\varepsilon] \leq I[U^*(t,0);0] + \varepsilon[\Lambda^*(t_0,0)\phi - \Lambda^*(t_1,0)\zeta] + \int_{t_0}^{t_1} [\Lambda^* h - \dot{\mu}^*\psi] \; dt \qquad (3.52)$$

donde en el integrando Λ^* y μ^* tienen como argumentos $(t,0)$; y h y ψ tienen los argumentos $|t,Y^*(t,0),U^*(t,0)|$

Además de estos dos Teoremas, Peterson formuló un tercero, pero que no es más que una generalización del primero y, a efectos del objetivo que guía nuestro trabajo no parece preciso explicitarlo (1).

Sí nos parece justo, en cambio, resaltar las aportaciones de este autor a la Teoría del Control Optimo, en especial por lo que se refiere a la interpre

---

(1) El enunciado de dicho teorema se encuentra en Peterson (1973)

tación de las variables auxiliares como tasas de variación, interpretación que, si bien ya había sido utilizada como tal en determinados modelos, no gozaba de la aceptación que la obra de Peterson le ha conferido.

Dejando a un lado el problema de optimización de Dorfman, y el análisis detallado sobre las variables auxiliares,que nos han servido para acercarnos al sentido económico de los distintos elementos del Principio de Máximo, podemos pasar a plantear un problema de control general que sirva como resumen de estos resultados.

Sea el problema de control siguiente:

$$\begin{array}{l}\text{Maximizar} \\ \text{(o minimizar)}\end{array} \quad I(Y,U) = \int_{t_o}^{t_1} F(t,Y,U)\,dt \qquad (3.53)$$

donde I(Y,U) en economía puede representar el bienestar social, los beneficios de los empresarios, etc. y por tanto F(Y,U,t) expresa el nivel de utilidad del optimizador en el tiempo t,

sujeto a:

$$\dot{Y} = G(t,Y,U) \qquad (3.54)$$

$$Y(t_o) = Y_o$$

$$Y(t_1) = Y_1$$

Según hemos estudiado en páginas atrás, la función auxiliar representa en cada instante la sensibilidad del funcional objetivo futuro ante pequeñas variaciones del estado en el tiempo t a lo largo de la trayectoria óptima. En otras palabras, la función auxiliar es lo que en economía se define como el precio sombra de una unidad de estado en un tiempo t de una trayectoria óptima, expresado en las unidades del funcional óptimo.

La interpretación de la función Hamiltoniana correspondiente a este problema:

$$H = F(t,Y,U) + \Lambda(t).G(t,Y,U)$$

puede hacerse de la forma siguiente.

Supongamos que esta función está multiplicada por dt; entonces tendremos que:

$$\begin{aligned} H\,dt &= F.dt + \Lambda.G.dt \\ &= F.dt + \Lambda.dY \end{aligned} \tag{3.55}$$

ya que $\dot{Y} = G(t,Y,U)$. El primer término del lado derecho es lo que hemos denominado la contribución directa al funcional objetivo en el intervalo que va desde t a t + dt. Si el estado del sistema es Y y aplicamos el control U, tendremos que:

$$dY = G(t,Y,U)\ dt$$

será la variación del estado desde t a t + dt cuando el estado es Y y tomamos la decisión U. Según ésto, el segundo término de (3.55) expresará el valor, en unidades del funcional, de la variación del estado (dY) en el tiempo que va desde t a t + dt. Por tanto, H.dt de (3.55) puede considerarse como la contribución total al funcional objetivo desde t a t + dt cuando el estado del sistema es Y(t) y el control es U(t).

Esta interpretación de la función Hamiltoniana como tasa de actividad en cada instante es coherente con lo que expresa la condición de Principio de Máximo. Esta condición nos dice que basta maximizar mediante la elección de la función de control la función Hamiltoniana (tasa de actividad productiva, o de consumo, etc.) en cada instante del intervalo pertinente, sobre la base del estado y del precio sombra existentes, para que la trayectoria de estado correspondiente sea la óptima. Lo que está implícito en estos resultados es que si sólo maximizaramos el integrando F(t,Y,U) estaríamos ignorando el efecto que sobre una actividad concreta tienen las variables de control sobre el estado del sistema.

Por último, vamos a comentar la condición necesaria de optimalidad que recoge la evolución temporal de las variables auxiliares. Esta condición se expresa como:

$$- \dot{\Lambda} = \frac{\partial H}{\partial Y} \qquad (3.56)$$

Si expresamos (3.56) en forma de diferenciales, tendremos:

$$- d\lambda = H_Y \, dt \qquad (3.56')$$

La condición (3.56') expresa que a lo largo de una trayectoria óptima el decremento del precio sombra correspondiente desde t a t+dt es igual al incremento de actividad obtenido como resultado de pequeños cambios en el estado del sistema.

Estos comentarios son lo suficientemente generales como para considerarlos aplicables a gran número de problemas. Y sólo al aplicarla a un problema específico la interpretación de estos elementos se ve dotada de mayor contenido. Recapitulando de todo lo anterior, es preciso resaltar lo siguiente:

i) El Principio de Máximo en cuanto que pueda partirse de un enfoque que lo interconexione con aspectos de la realidad económica presenta una serie de matizaciones específicas distintas a las que podrían considerarse con la mera observación de los elementos matemáticos que definen dicho Principio.

ii) Tal significación económica del Principio de Máximo permite por tanto considerarlo desde una perspectiva bastante amplia en cuanto a la esfera de los problemas a los que puede ser aplicado. Nosotros hemos visto aquí , por un lado, el caso del control de Dorfman, y también para un instrumento específico como son las variables auxiliares, su significado más elemental en términos de conceptos de amplia utilización en la teoría económica (precio sombra).

Estos son dos enfoques de gran relevancia, aunque no los únicos, que ponen de manifiesto la significación del Principio de Máximo desde el punto de vista que aquí nos ocupa.

iii) No nos gustaría concluir este apartado sin hacer de nuevo una referencia a la parte empírica de nuestro trabajo. Ya que es obvio que es en base a planteamientos tales como los anteriormente formulados que se han llevado a cabo las distintas aplicaciones económicas del Principio de Máximo. Nuestro caso concreto, si bien no tiene una relación directa con la esfera de los problemas analizados por Dorfman, sí puede considerarse dentro de sus planteamientos, puesto que se mueve en un área muy concreta y específica y, por lo mismo, donde mejor puede apreciarse la utilidad de tales esquemas teóricos.

3.3. EL PRINCIPIO DEL MAXIMO PARA PROBLEMAS AUTONOMOS

Vamos a tratar en este apartado de las peculiaridades que supone la consideración del Principio de Máximo en un problema de control autónomo. Como se sabe, la consideración de un problema como autónomo o no autónomo reside en la ausencia o presencia, respectivamente, de la variable tiempo como argumento en las funciones que se utilizan en dicho problema.

Este apartado lo vamos a enfocar desde el punto de vista de un problema no autónomo que será transformado en uno autónomo que nos servirá para demostrar que el Principio de Máximo es, como conjunto de condiciones necesarias, salvo en una pequeña matización (la variación temporal de la función Hamiltoniana), equivalente en ambos casos (1).

Para ello, transformaremos el problema no autónomo en uno autónomo mediante la incorporación al vector de estado de una nueva variable y_{n+1}, y comprobaremos cómo el Principio de Máximo derivado para este problema es idéntico al correspondiente al problema

---

(1) Para un análisis más detallado que el aquí ofrecido, puede verse Takayama (1974), Capítulo 8.

de control no autónomo. Sólo la variación de la función Hamiltoniana respecto al tiempo nos distinguirá el problema autónomo del no autónomo, ya que, obviamente, para el primero H será una constante a lo largo del sendero óptimo, mientras que para el no autónomo H no tiene por qué ser una constante para los valores óptimos de Λ, Y y U.

Vamos en principio a transformar el problema de control del Capítulo 1 en uno autónomo.

Para llevar a cabo tal transformación, introduzcamos en el problema no autónomo una nueva variable de estado "$y_{n\ 1}$" que varía según la ley siguiente:

$$\frac{dy_{n+1}}{dt} = 1 \tag{3.57}$$

tal que:

$$\begin{aligned} y_{n+1}(t_o) &= t_o \\ y_{n+1}(t_1) &= t_1 \end{aligned} \tag{3.58}$$

Obviamente, tendremos que:

$$y_{n+1} \equiv t \tag{3.59}$$

Llamemos al nuevo vector estado Y^A, vector que estará formado por las n+1 variables siguientes:

$$Y^A = (y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}) \qquad (3.60)$$

Con esta transformación el sistema dinámico del modelo de los Capítulos previos puede escribirse de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= G(Y, U, y_{n+1}) \\ \frac{dy_{n+1}}{dt} &= 1 \end{aligned} \qquad (3.61)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= G(Y^A, U) \\ \frac{dy_{n+1}}{dt} &= 1 \end{aligned} \qquad (3.62)$$

Teniendo en cuenta las expresiones (3.57), (3.58) y (3.61), el problema de control puede ser formulado en los siguientes términos:

i) Dadas las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} Y(t_o) &= Y_o \\ Y(t_1) &= Y_1 \\ y_{n+1}(t_o) &= t_o \\ y_{n+1}(t_1) &= t_1 \end{aligned} \qquad (3.63)$$

ii) y las restricciones:

$$\dot{Y} = G(Y^A, U)$$
$$\dot{y}_{n+1} = 1 \qquad (3.64)$$

iii) maximizar el funcional

$$I(Y^A,U) = \int_{t_o}^{t_1} F(Y^A, U)\, dt \qquad (3.65)$$

Como se desprende de i), ii) e iii), el problema formulado corresponde a uno autónomo (ya que la variable tiempo no aparece como variable explícita) de extremos fijos y sin restricciones de control ni de estado. El Hamiltoniano H de este problema será también una función sin el tiempo entre sus argumentos. Esto es,

$$H^A = F(Y^A,U) + \Lambda(t).G(Y^A,U) + \lambda_{n+1} \qquad (3.66)$$

El estudio de las condiciones necesarias para el problema formulado nos lleva a que si $[Y(t), y_{n+1}(t)]$ y $U(t)$ proveen una solución óptima, entonces existirá una función vector $[\Lambda(t), \lambda_{n+1}]$ cuyos elementos son funciones contínuas tales que si

$$H^A = F + \Lambda.G + \lambda_{n+1} \qquad (3.67)$$

entonces las condiciones necesarias obtenidas en el Capítulo 1 quedarán:

$$\dot{\Lambda} = - H_Y^A = - H_Y \tag{3.68}$$

$$\dot{\lambda}_{n+1} = -H_{y_{n+1}}^A = - H_t \tag{3.69}$$

$$\dot{Y} = H_\Lambda^A = H_\Lambda \tag{3.70}$$

$$\dot{y}_{n+1} = 1$$

$$H_U^A = H_U = 0 \tag{3.71}$$

o bien, para los valores óptimos de Y^A y Λ, H^A será una función de U, y tendremos:

$$\mathcal{M}^A(\Lambda, Y, y_{n+1}) = \underset{\{U(t) \in \overline{U}_p\}}{\text{maximizar}} \quad H^A(Y^A, \Lambda, y_{n+1}, U) \tag{3.72}$$

En términos del problema no autónomo original, si los vectores de estado y coestado están en sus valores óptimos se sigue que:

$$\underset{\{U(t) \in \overline{U}_p\}}{\text{maximizar}} \quad H(t, Y, U, \Lambda) = \mathcal{M}(t, Y, \Lambda) \tag{3.73}$$

Las condiciones (3.68), (3.70) y (3.71) reflejan el hecho de que el problema autónomo es equivalente al no autónomo. Finalmente, dado que

$$H^A = H + \lambda_{n+1} \qquad (3.74)$$

$$\mathcal{M}^A = \mathcal{M} + \lambda_{n+1} \qquad (3.75)$$

el requerimiento de que la función control U(t) maximice la función Hamiltoniana H^A en cada instante temporal se reduce, según la condición (3.72), a que U(t) maximice H $\forall t \in [t_o , t_1]$. De esta forma se ha eliminado λ_{n+1} de las condiciones necesarias, y se verifica que las condiciones del Principio de Máximo para un problema autónomo son las mismas que las estudiadas para uno no autónomo más la información adicional dada por la ecuación (3.69).

El sistema dado en (3.69) nos obliga a estudiar, aunque sólo sea brevemente, el comportamiento de la función H respecto al tiempo. En este sentido, vamos a calcular a continuación la variación temporal de la función Hamiltoniana, empezando por un sistema no autónomo. Esto es, sea

$$H(t,Y,\Lambda,U) = F(t,Y,U) + \Lambda(t).G(t,Y,U) \qquad (3.76)$$

la función Hamiltoniana de un sistema no autónomo. La variación temporal de esta función viene expresada por:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial Y}\dot{Y} + \frac{\partial H}{\partial U}\dot{U} + \frac{\partial H}{\partial \Lambda}\dot{\Lambda} + \frac{\partial H}{\partial t} \qquad (3.77)$$

Ahora bien, a lo largo del sendero óptimo se cumplirá que:

$$\frac{\partial H}{\partial Y} = -\dot{\Lambda}$$

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0 \qquad (3.78)$$

$$\dot{Y} = G(t,Y,U)$$

Por tanto, como H tiene que ser una función contínua del tiempo, se seguirá que:

$$\dot{H} = H_t \qquad (3.79)$$

en todos los puntos donde H tenga una derivada.

Obviamente, H(t,Y,U) tiene que ser una función contínua del tiempo. Para probarlo basta ver que H es contínua a través de un salto de U(t) (única función contínua a trozos). Así, si en un punto t^* donde U(t) tiene un salto $U_-(t^*)$ y $U_+(t^*)$ dan soluciones alternativas óptimas; de aquí se deduce que la función H debe tener el mismo valor para los dos controles y es, consiguientemente, contínua a través de un salto de U(t). Si no fuera así, $U_-(t)$ ó $U_+(t)$ podrían dar un valor mayor de H, lo cual conduciría a negar el criterio seguido en la maximización de H.

Volviendo al estudio de la variación temporal de H, pero en este caso para un sistema autónomo, tendremos:

$$\frac{dH}{dt} = H_Y.\dot{Y} + H_U.\dot{U} + \dot{\Lambda}.G \qquad (3.80)$$

Si estamos a lo largo de un sendero óptimo,

$$\frac{dH}{dt} = H_U.\dot{U} \qquad (3.81)$$

Como $H_U.\dot{U}$ siempre es cero (tanto si U es un valor interior a $\overline{U}_p$ como si está sobre el límite) (1), entonces:

$$\frac{dH}{dt} = H_t = 0 \qquad (3.82)$$

y ésto es lo mismo que afirmar que para un problema autónomo la función Hamiltoniana es una constante a lo largo del sendero óptimo.

Para el sistema no autónomo, transformado en autónomo, tendremos que:

$$\dot{\lambda}_{n+1} = - H^A_{Y_{n+1}} \qquad (3.83)$$

---

(1) Hadley-Kemp (1971)

o, lo que es lo mismo,

$$\dot{H} = H_t = -\dot{\lambda}_{n\,1} \tag{3.84}$$

En los sistemas no autónomos H no necesita ser una constante a lo largo del sendero óptimo, y la variación temporal de H viene dada por:

$$H(t,Y,U) = -H(t_1,Y(t_1),U(t_1)) - \int_{t_1}^{t} H_t \, dt \tag{3.85}$$

Por último, consideraremos el problema de control de un sistema autónomo y de un sistema no autónomo con tiempo final no especificado.

Para el sistema no autónomo esta situación conduciría, vía la condición de transversalidad estudiada en el Capítulo I, a que:

$$H[t_1,\Lambda(t_1),Y(t_1),U(t_1)] = 0 \tag{3.86}$$

donde $[\Lambda(t_1),Y(t_1),U(t_1)]$ es la solución triple en el instante t_1. En términos de $\mathcal{M}[Y(t),\Lambda(t),t]$, la condición de transversalidad se escribiría:

$$\mathcal{M}[Y(t_1),\Lambda(t_1),t_1] = 0 \tag{3.87}$$

siendo $Y(t_1)$ y $\Lambda(t_1)$ los valores óptimos.

Para el problema autónomo, la condición adicional se expresaría en los siguientes términos:

$$\mathcal{M}^{A}|Y(t),\Lambda(t)| = H^{A}[Y(t),\Lambda(t),U(t)] = 0, \quad \forall t \qquad (3.88)$$

donde (3.88) se deriva del hecho expuesto en las páginas anteriores de que:

$$\frac{d}{dt}\,\mathcal{M}^{A}|Y(t),\Lambda(t)| = 0 \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{M}^{A}|Y(t),\Lambda(t)| = \text{constante} \quad \forall t \qquad (3.89)$$

ya que se satisfacen:

$$\dot{Y} = H_{\Lambda}$$
$$-\dot{\Lambda} = H_{Y}$$

3.4. UN MODELO DE CONTROL LINEAL

Las razones que justifican la inclusión en este Capítulo de un apartado específicamente dedicado al control lineal son de dos tipos:

i) Las que se derivan de la relevancia de esta modalidad de control desde el punto de vista teórico. Tal relevancia puede corroborarse simplemente destacando la atención prestada a dicho tema por algunos de los principales tratadistas, partiendo de Pontryagin (1962) y pasando por los trabajos fundamentales de Intriligator (1964), Bose (1967) y Takayama (1974) entre otros. Por citar un trabajo reciente que aborde estos temas, se puede mencionar el libro de Sethi y Thompson (1981).

ii) El interés adicional del que se ve revestido dicho tipo de control en nuestro caso por el hecho de que el modelo numérico de nuestro trabajo corresponde precisamente a dicho tipo de control.

Por enlazar con la línea de argumentaciones básica de nuestro trabajo, y tal como se desprende de lo expuesto y analizado en los Capítulos I y II, el Principio de Máximo da sólo condiciones necesarias. No obstante, y tal como señalábamos en el epígrafe de la suficiencia, si la función Hamiltoniana es una función cóncava de las variables de control, las condiciones necesarias del Principio de Máximo son suficientes.

Existe, además de esta situación, otra para la que las condiciones son suficientes; ésta se da cuando la función Hamiltoniana es una función lineal en las variables de control. Esta otra modalidad de suficiencia ocupará gran parte de esta sección que empezaremos planteando con lo que se conoce como un problema de control lineal general. Una vez formulado el caso general, expondremos un modelo sencillo de control lineal desarrollado por Pontryagin (1962) (1).

A continuación, el control lineal lo utilizaremos para obtener lo que conocemos como control feedback (o de circuito cerrado) a partir de una función objetivo cuadrática en estado y control.

---

(1) Véase Pontryagin, pág. 116 y stes.

3.4.1. El problema del control lineal

Un problema de control se denomina lineal si las funciones que intervienen en él son lineales respecto de las variables de control (1). De manera detallada, el problema de control lineal puede ser formulado del siguiente modo:

i) Dado el sistema dinámico

$$\dot{Y} = A(t).Y + B(t).U + h(t) \qquad (3.90)$$

donde A y B son matrices de coeficientes de dimensiones (n x n) y (n x m) respectivamente,

ii) con las variables de control sujetas a las restricciones lineales:

$$R(t).U \leqslant \beta \qquad (3.91)$$

iiii) maximizar el funcional:

$$I(Y,U) = \int_{t_o}^{t_1} [C(t).Y(t)+D(t).U(t)]\, dt \qquad (3.92)$$

---

(1) Un cuadro resumen sobre distintos modelos de control lineal se encuentra en Sethi y Thompson (1981).

Para este problema la función Hamiltoniana respondería a la forma lineal:

$$H(t,Y,U,\Lambda) = C(t)Y(t) + D(t)U(t) + \Lambda(t)A(t)Y(t) + $$
$$+ \Lambda(t)B(t)U(t) \qquad (3.93)$$

Las condiciones necesarias derivadas para el Principio de Máximo en el Capítulo 2 se transforman para el control lineal en:

a) $\dot{\Lambda} = - C(t) - A^T(t)\Lambda(t) \qquad (3.94)$

donde A^T es la traspuesta de A.

b) $D(t) + B^T(t).\Lambda(t) + R^T.\mu = 0 \qquad (3.95)$

ó bien:

$$D(t) + B^T(t).\Lambda(t) = 0$$

con

$$\mu\left[R(t)U(t) - \beta\right] = 0 \quad \text{para } \mu \leqslant 0 \qquad (3.96)$$

c) $\dot{Y} = A(t).Y + B(t).U + h(t) \qquad (3.97)$

El problema de control formulado y las condiciones necesarias a), b) y c) se simplifica enormemente si los coeficientes, en este caso matrices de coeficientes, son independientes del tiempo. En este sentido, vamos a suponer el siguiente problema de control lineal:

i) Dado el sistema dinámico lineal

$$\dot{Y} = A.Y + B.U. \tag{3.98}$$

ii) donde además el dominio de control $\bar{U}_p$ es un poliedro cerrado convexo (1) y donde, por tanto, las restricciones de control en forma vectorial pueden expresarse como:

$$R.U \leqslant \beta \tag{3.99}$$

Si suponemos valores específicos del vector Λ y del vector estado Y, la función Hamiltoniana será una función de la variable de control, esto es:

$$H = Q.U + \phi \tag{3.100}$$

---

(1) Un poliedro cerrado y convexo en R^m es la intersección de un número finito de espacios mitad cerrados. Esto es, el conjunto de puntos en R^m que satisfacen un sistema finito de desigualdades lineales

$$\sum_{i=1}^{m} r_i^j \, U_i \leqslant \beta^j \qquad j = 1 \ldots h$$

Si el poliedro está limitado, y consiguientemente es compacto, es la envoltura convexa de sus vértices: el número de vértices es obviamente finito.

Entonces el problema de maximizar la función H sujeta a la restricción (3.99) se puede considerar un problema de programación lineal. Se sabe de la programación lineal que al menos uno de los vértices del poliedro convexo es un punto óptimo, esto es, en términos del problema de control, está garantizada la existencia de un control óptimo. Llamemos $U_1, \ldots, U_s$ a los vértices del poliedro. Para algún punto extremo $U_i \; / \; \forall i, \; i = 1, \ldots, s,$ las restricciones (3.99) que son activas pueden ser determinadas y consiguientemente se determinaría el conjunto de los multiplicadores que son cero por corresponder a restricciones no activas.

Desde (3.94) se puede establecer que:

$$\dot{\Lambda} = P \cdot \Lambda \qquad (3.101)$$

El sistema (3.101) tiene n ecuaciones diferenciales ordinarias y por tanto será posible construir n soluciones linealmente independientes. De este modo, para cada punto extremo del sistema no autónomo (3.90) será posible hallar la solución general (1).

---

(1) Pontryagin demuestra la existencia y unicidad del control óptimo para un sistema lineal autónomo, y más tarde lo hará para uno no autónomo, basándose en ambos casos en la analogía con la programación lineal. Véase Pontryagin, op.cit., pág. 112 y stes.

Es obvio que durante cierto intervalo de tiempo las variables de control son constantes, con $U^{*} = U_i$; después se produce un salto de uno a otro punto extremo con las variables de control de nuevo constantes para un tiempo especificado con $U^{*} = U_q$, y así sucesivamente. Por tanto, la forma de la solución general para (3.90) a (3.92) se conoce.

Supongamos que por requerimientos del modelo $Y(t_1)$ es libre. Consiguientemente, $\Lambda(t_1) = 0$ y entonces se habrá determinado una solución única $\Lambda(t)$ que satisface las condiciones necesarias (1).

Esta solución puede ser sustituída en la función H; entonces, utilizando una aproximación de programación paramétrica, podemos determinar para cada t un punto extremo óptimo $U^{*}(t)$. De este modo, $U^{*}(t)$ será un control óptimo. Una vez determinado $U^{*}(t)$, la trayectoria de estado óptima puede calcularse desde el sistema dinámico (3.90).

---

(1) Esta será la hipótesis utilizada en nuestro modelo numérico del monopolio de Tabacos. Véase Capítulo 4.

Por tanto, para este problema formulado, denominado lineal, la solución óptima $(U(t), Y(t))$ puede ser calculada sin grandes dificultades.

Como caso particular del control lineal vamos a estudiar el correspondiente a un problema autónomo cuyo objetivo es minimizar el tiempo. El problema puede formularse del siguiente modo:

i) Sea el sistema dinámico lineal autónomo

$$\dot{Y} = A.Y(t) + B.U(t) \qquad (3.102)$$

ii) donde los controles pertenecen a un conjunto m-dimensional $\bar{U}_p$, esto es, al conjunto de puntos que satisfacen una o varias restricciones lineales (1)

$$\bar{U}_p = \{U_1(t) \ \dots \ U_m(t) / \ R.U \leq \beta\} \qquad (3.103)$$

---

(1) Como puede observarse, aquí el espacio de control $\bar{U}_p$ es, como ya explicamos, un poliedro cerrado y convexo. No obstante, Pontryagin demuestra la similitud en las condiciones necesarias para el problema con $\bar{U}_p$ como un paralelepípedo. Véase Pontryagin, op. cit.

iii) Como el objetivo es minimizar el tiempo que emplea el sistema para llevar al estado desde un estado inicial Y_o a un estado final Y_1, el integrando del funcional objetivo será una constante.

La resolución de este problema nos lleva a formar la función Hamiltoniana, que para este problema será:

$$H(\Lambda,Y,U) = -1 + \Lambda(t)(A.Y + B.U) \qquad (3.104)$$

Es obvio que la función H considerada como una función de $U \in \overline{U}_p$ tiene un extremo en el mismo instante que (Λ, BU). La maximización de (Λ, BU) considerada como una función de $U \in \overline{U}_p$ puede escribirse como una función $\phi(\Lambda)$, esto es,

$$(\Lambda, BU) = \phi(\Lambda) \qquad (3.105)$$

Entonces, desde el Principio de Máximo estudiado en los Capítulos 1 y 2, si U(t) es el control óptimo que lleva el estado Y_o al estado Y_1 en $[t_o \; t_1]$ existirá una solución a $\Lambda(t)$ desde el sistema

$$\dot{\Lambda} = A^T \Lambda \qquad (3.106)$$

tal que

$$(\Lambda, BU) = \phi(\Lambda) \qquad (3.107)$$

Para cada solución no trivial de (3.106) la relación (3.107) define unívocamente una función de control óptimo. Consiguientemente, la función de control es "constante a trozos, y sus únicos valores están en los vértices del poliedro cerrado y convexo" (1).

Puesto que (3.106) no depende de las funciones U(t) e Y(t), la solución puede hallarse en función de las condiciones iniciales y para cada solución $\Lambda_o^*(t)$ del sistema (3.106) los controles óptimos deben minimizar la siguiente función lineal:

$$\phi\left[\Lambda_o^*(t)\right] = \Lambda_o^*(t).B.U(t) \qquad (3.108)$$

sujeta a las restricciones:

$$R.U(t) \leqslant \beta \qquad (3.109)$$

Para que este sistema tenga solución única para todo t, supuestas fijas las variables coestado $\Lambda_o^*(t)$, es suficiente que para todo t el hiperplano

$$\sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t).b_{ij}\right] U_j \qquad (3.110)$$

---

(1) Pontryagin, op. cit., pág. 115.

no contenga a ningún segmento obtenido como combinación convexa de dos puntos extremos, excepto a lo más para un conjunto de puntos del tiempo t que es numerable.

Esto es, sea

$$\overset{o}{W} = \{w \;/\; w_1 \;\ldots\; w_m\} = (u_1^1 \ldots u_m^1) - (u_1^o \ldots u_m^o)$$

donde u^1 y u^o son puntos extremos del simplex

$$\sum_{j=1}^{m} r_{lj} u_j \leq \beta_l \qquad l = 1 \ldots h$$

Entonces, si $w \;\; W$ los vectores $\{Bw, ABw, \ldots, A^{n-1}Bw\}$ son independientes, el hiperplano

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^o(t) b_{ij} \right) u_j$$

no contiene a ningún elemento obtenido por combinación convexa de dos puntos extremos, excepto a lo más para un conjunto de puntos del tiempo t que es numerable.

Así resulta que cada control óptimo para el problema formulado como:

$$\text{maximizar } I = \int_{t_o}^{t_1} F(Y, U)\, dt$$

sujeto a:

$$\dot{Y} = A.Y(t) + B.U(t)$$

$$Y(t_o) = Y_o$$

$$Y(t_1) = Y_1$$

es una función constante a intervalos de tiempo, que toma sus valores en el conjunto formado por los puntos extremos del simplex.

Los problemas de control óptimo cuya solución consiste en seleccionar como óptimos los puntos extremos del conjunto convexo de que se trata, se denominan controles de bang-bang. Si bien la denominación de control bang-bang se dió para los puntos extremos del convexo $\{u_1 \ldots u_m / u_j \leq 1, j = 1 \ldots m\}$, no tardó mucho en extenderse tal denominación a todos los problemas de control lineal con la variable de control sometida a restricciones de desigualdad.

La importancia de esta modalidad de control bang-bang es, en nuestro trabajo, de gran valor si tenemos en cuenta que el objetivo de nuestro trabajo empírico: maximizar los Ingresos de Tabacalera, ha necesitado de esta forma de control óptimo como instrumento clave en el proceso. Es por esta razón por la que dedicaremos unas líneas más a este tema, intentando recoger en ellas los resultados más recientes.

El caso más general en esta modalidad de control es cuando las funciones U(t) deben satisfacer restricciones de desigualdad de la forma

$$W(t) \leqslant U(t) \leqslant X(t) \qquad \forall t \ / \ t \in [t_o \ t_1]$$

siendo W(t) y X(t) funciones contínuas a trozos. No No obstante, en la mayoría de los sistemas dinámicos los límites de la función de control son constantes dadas de la forma

$$A \leqslant U(t) \leqslant B$$

Como ejemplo ilustrativo puede pensarse en U(t) como la aceleración de un vehículo espacial. En este ejemplo la función aceleración puede tomar bien el valor B ó bien el valor A excepto en un número finito de puntos donde U(t) salte desde A a B, ó bien de B a A.

Esa función de control U(t) podrá tomar el valor superior o el valor inferior, según sea el objetivo del modelo y el signo de su coeficiente en la función Hamiltoniana correspondiente. Así,nos podemos enfrentar a funciones de control con al menos un salto desde un valor a otro, llamadas funciones de control bang-bang, o bien con funciones que se mantienen en uno de los valores durante el intervalo total; funciones de este tipo son denominadas de "control constante" (1).

La literatura más moderna sobre este tipo de control utiliza una terminología bastante ilustrativa (1). Así,

$$U = \text{bang.}\left[A,\ B,\ W(Y,\Lambda,t)\right]$$

expresa que la función de control óptimo toma el valor B si $W(Y,\Lambda,t)$ es positivo; el valor A si $W(Y,\Lambda,t)$ es negativo; y $U(t)$ no estará definido si $W(Y,\Lambda,t) = 0$ (2), siendo $W(Y,\Lambda,t)$ el coeficiente de la variable de control en la función Hamiltoniana.

---

(1) Este tipo de control es una generalización del resultado conocido como Principio de Bang-bang. Halkin (1965).

(2) El caso en que el coeficiente $W(Y,\Lambda,t) = 0$ se denomina 'instante de control singular'. Véase Bell and Jacobson (1975).

3.4.2. El Control Feedback

Existen, tal como señalábamos en el primer Capítulo de este trabajo, dos formas de control: el control "open-loop" (o de circuíto abierto) y el control "closed-loop" (o de circuíto cerrado, más comúnmente conocido como feedback).

La primera modalidad, que es la más frecuente en las distintas aplicaciones de esta teoría, no da los resultados deseables en un gran número de casos. La principal dificultad de esta forma de control estriba en que si el mecanismo de control introduce un determinado error y para algún período temporal la variable de control no alcanza el valor deseado, entonces el sistema se desviaría del sendero óptimo y el responsable del control (por ejemplo un computador) ignorará tal acontecimiento. Esto dará lugar a que el sistema vaya por senderos no óptimos, lo que consiguientemente lleva a resultados no deseables.

En resumen, el tipo de control que hemos comentado más arriba, que se fundamenta en determinar las variables de control de acuerdo a algún programa de tiempo previamente especificado, no podemos esperar que funcione satisfactoriamente en todos los casos.

En el otro tipo de control, el control "closed-loop" o control feedback, la trayectoria de control óptimo viene determinada en función de las variables de estado. Como es obvio, lo ideal sería que el sistema de control fuera capaz, al menos ocasionalmente, de observar el estado actual del sistema y, si el sistema se desvía del sendero óptimo inicialmente determinado, diseñar un nuevo sendero apropiado para el estado presente del sistema. En este sentido, en el control feedback las decisiones pueden revisarse a la luz de la nueva información contenida en las variables de estado en curso.

Obviamente, desde el punto de vista de las aplicaciones de la Teoría de control, lo que realmente se necesita no es una función que nos dé los valores de las variables de control en cada t, sino una función que dé los valores óptimos de las variables de control para cada estado posible del sistema, esto es, una función tal como U(Y). Esta función U(Y) se llama en términos de la Teoría del Control "función de síntesis", y el problema de obtener el control "feedback" óptimo se llama de síntesis.

El conocimiento de la función de síntesis para un problema de control permitiría que la unidad de control (por ejemplo, un conjunto de sensores de un ordenador) controlara el estado del sistema con la flexibilidad que da una corriente de información contínua, contribuyendo de esta forma a incrementar la estabilidad del sistema ajustando contínuamente las variables de control a sus valores óptimos. En otras palabras, la función de síntesis permite, supuesto que el control

$$U = L(Y) \tag{3.111}$$

fuese el óptimo deseado y el estado final fuera conocido, determinar la política de actuación óptima sobre el sistema en cada t, dando así lugar a un modelo en el que la propia evolución de la variable estado va determinando el control óptimo a aplicar, el cual a su vez describe la evolución futura de la trayectoria de estado mediante el sistema de ecuaciones de transición.

Desgraciadamente, la determinación de la función de síntesis en un problema de control óptimo es, salvo casos especiales, una cuestión difícil de resolver. La dificultad estriba en que, como Pontryagin se ñala, la solución de cada problema requiere construcciones especiales (1).

Dentro de la modalidad de control feedback vamos a detenernos en el caso de relevancia singular: el de objetivo cuadrático (2).

Los problemas de control en los cuales el sistema dinámico es lineal y el funcional objetivo es cuadrático merecen un estudio especial. La importancia de estos problemas reside en que esta estructura lineal con función cuadrática permite que el control óptimo se exprese en forma feedback lineal.

---

(1) Como caso especial cabe citar el control lineal de tiempo óptimo analizado por Pontryagin y colaboradores. El método seguido por éste para determinar la función de síntesis se basa fundamentalmente en las características del control lineal, esto es, en la determinación de una solución no trivial de la ecuación adjunta.

(2) Un estudio de este tipo de problemas, pero con otros casos especiales respecto al funcional cuadrático y al sistema dinámico, se pueden estudiar en Bryson y Ho (1969).

Además, como más tarde veremos, este tipo de problemas pueden resolverse utilizando los métodos de la Programación Dinámica, con las ventajas que ésto supone desde el punto de vista de soluciones numéricas.

-- El caso de función objetivo cuadrática sin restricciones

Supongamos el siguiente problema:

i) Dado el sistema dinámico lineal:

$$\dot{Y}(t) = A(t).Y + B(t).U(t) \qquad (3.112)$$

ii) con la condición extrema

$$Y(t_o) = Y_o \qquad (3.113)$$

siendo por tanto Y_1 libre y t_1 fijado,

iii) minimizar la función objetivo cuadrática (1):

---

(1) Las funciones objetivo de esta forma son muy utilizadas en las ciencias físicas. En estos problemas los valores deseados son cero. Véase para estos casos Fel'dbaum (1975).

$$I(Y,U) = \frac{1}{2}\int_{t_o}^{t_1} Y^T(t)Q(t)Y(t)\,dt + $$

$$+ \frac{1}{2}\int_{t_o}^{t_1} U^T(t)R(t)U(t)\,dt \qquad (3.115)$$

donde $Q(t)$ y $R(t)$ son matrices simétricas de orden $n \times n$ y $m \times m$ respectivamente.

No consideraremos restricción ni sobre las variables de control ni sobre las variables de estado.

Como en todo problema de control, nuestra primera etapa será la formulación de las condiciones necesarias.

La solución del problema requiere primero formar la Hamiltoniana correspondiente, que en este caso sería:

$$H = -\frac{1}{2}\left[Y^T(t)Q(t)Y(t) + U^T(t)R(t)U(t)\right] +$$

$$+ \Lambda^T(t)\left[A(t)Y(t) + B(t)U(t)\right] \qquad (3.116)$$

Según el Principio de Máximo, la condición para maximizar la función Hamiltoniana (H) con respecto a la función de control es equivalente, para el caso sin restricciones, a:

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0 \qquad (3.117)$$

Particularizando para nuestro caso, tendremos:

$$\frac{\partial H}{\partial U} = - \frac{1}{2}\left[U^T(t)R(t) + \Lambda^T(t)B(t)\right] = 0 \qquad (3.118)$$

y operando queda:

$$\frac{\partial H}{\partial U} = - U^T(t)R(t) + \Lambda^T(t)B(t) = 0 \qquad (3.119)$$

Despejando en (3.119) la función control, ésta será:

$$U(t) = R(t)^{-1} B^T(t) \Lambda(t) \qquad (3.120)$$

Sustituyendo esta expresión para el control óptimo en el sistema (3.112) tendremos:

$$\dot{Y} = A(t)Y(t) + B(t)R(t)^{-1}B^T(t)\Lambda(t) \qquad (3.121)$$

Por otro lado, el sistema de ecuaciones adjuntas que se obtiene de la condición necesaria (1.21)

$$\frac{\partial H}{\partial Y} = - \dot{\Lambda} \qquad (3.122)$$

es para este caso:

$$\frac{\partial H}{\partial Y} = \Lambda^T(t)A(t) - \frac{1}{2} Y^T(t)Q(t) = - \dot{\Lambda}^T \qquad (3.123)$$

Calculando la traspuesta de (3.123),

$$A^T(t)\Lambda(t) - Q(t)Y(t) = -\dot{\Lambda} \qquad (3.124)$$

Multiplicando por -1, queda:

$$Q(t)Y(t) - A(t)^T\Lambda(t) = \dot{\Lambda} \qquad (3.125)$$

Por tanto, el sistema de trayectorias de estado y de coestado será:

$$\dot{Y} = A(t)Y(t) + B(t)R(t)^{-1}B^T(t)\Lambda(t) \qquad (3.126)$$

$$\dot{\Lambda} = Q(t).Y(t) - A(t)^T.\Lambda(t) \qquad (3.127)$$

donde los sistemas (3.126) y (3.127) más las condiciones extremas:

$$Y(t_o) = Y_o$$

$$\Lambda(t_1) = 0$$

nos arroja 2n ecuaciones diferenciales de primer orden (n para las variables estado y n para las variables coestado), con 2n condiciones extremas (n en el tiempo inicial y n en el tiempo final).

Al tener la información sobre valores extremos en puntos distintos del tiempo, no podemos resolver el sistema integrando en el mismo sentido, sino que tendremos que utilizar métodos especiales, como la ecuación Riccati (1).

Dado que el sistema [(3.126) y (3.127)] es lineal y tanto $Y(t)$ como $\Lambda(t)$ dependen del estado inicial Y_o, se puede suponer que el vector de funciones auxiliares es una función lineal del estado, de la forma:

$$\Lambda(t) = - P(t).Y(t) \qquad (3.128)$$

donde $P(t)$ es una matriz de orden $n \times n$ desconocida, y que varía con el tiempo. La derivada con respecto del tiempo de (3.128) es:

$$\dot{\Lambda}(t) = - P(t)\dot{Y}(t) - \dot{P}(t)Y(t) \qquad (3.129)$$

Llevando (3.129) al sistema (3.127), queda:

---

(1) Otros métodos de resolución de problemas con condiciones extremas en distintos momentos del tiempo pueden estudiarse en Sethi y Thompson (1981).

$$- P(t)\dot{Y}(t) - \dot{P}(t)Y(t) = Q(t)Y(t) + A(t)^T P(t)Y(t) \tag{3.130}$$

Para resolver el par de sistemas (3.126) y (3.130) podemos multiplicar (3.126) por P(t) y queda:

$$\begin{aligned} P(t)\dot{Y}(t) - P(t)\dot{Y}(t) = {} & \dot{P}(t)Y(t) + P(t)A(t)Y(t) + \\ & Q(t)Y(t) + A(t)^T P(t)Y(t) - \\ & - B(t)R(t)^{-1}B(t)^T P(t)Y(t) \end{aligned} \tag{3.131}$$

Sacando factor común en (3.131) a Y(t) queda:

$$\begin{aligned} 0 = \Big[& \dot{P}(t) + P(t)A(t) + Q(t) + A(t)^T P(t) - \\ & - B(t)R(t)^{-1}B(t)^T P(t) \Big] Y(t) \end{aligned} \tag{3.132}$$

Esto se satisface para algún Y(t) si P(t) se elige como solución a la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} - \dot{P}(t) = {} & P(t)A(t) + A(t)^T P(t) - P(t)B(t)R(t)^{-1}B(t)^T P(t) + \\ & + Q(t) \end{aligned} \tag{3.133}$$

con la condición terminal que se deriva de (3.114) y (3.128)

$$P(t_1) = 0 \tag{3.134}$$

Una ecuación como (3.134) (no lineal de primer orden) se denomina ecuación Riccati. La solución para P(t) nos da una matriz P(t) simétrica, ya que $\dot{P}(t)$ lo es para todo t. Por tanto, en una primera etapa se resolvería la ecuación Riccati integrando desde $t = t_1$ con la condición $P(t_1) = 0$. Una vez P(t) es calculada, se resuelve el problema de control feedback para el estado inicial conocido $Y(t_o)$. Esto es, llevando (3.128) a (3.120), el control óptimo quedaría:

$$U(t) = R(t)^{-1}B(t)P(t)Y(t) \tag{3.135}$$

Esta expresión nos nuestra que mientras el sistema evoluciona el control óptimo es en cada instante una función del estado actual. Esta es la denominada solución "feedback" o control de circuíto cerrado.

El problema lineal y cuadrático que acabamos de resolver aplicando el Principio de Máximo de Pontryagin puede resolverse utilizando la ecuación de

Bellman de la Programación Dinámica. Tal como Bensoussan señala (1), una ventaja importante de la Programación Dinámica es que automáticamente determina el control óptimo en forma feedback. Esto es, una vez que la función de criterio óptimo V es conocida, la maximización con respecto al control U indicado en la ecuación de Bellman:

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(Y,t) = \underset{U \in \bar{U}_p}{\text{maximizar}} \left[F(Y,U) + \frac{\partial V}{\partial Y}(Y,t)G(Y,U)\right]$$

permite obtener el valor U(t) que se aplicará si el estado del sistema es Y en el tiempo t.

La Programación Dinámica puede aplicarse al problema lineal cuadrático. Así, a partir del sistema (3.112),

$$\dot{Y} = A(t).Y(t) + B(t).U(t)$$

y de la función (3.115),

$$I = \frac{1}{2}\int_{t_o}^{t_1}\left[Y(t)^T Q(t) + U(t)^T R(t) U(t)\right] dt$$

la ecuación de Bellman se expresaría de la siguiente

(1) Véase Bensoussan (1974)

forma:

$$- \frac{\partial V}{\partial t} (Y,t) = \underset{\{U(t)\}}{\mathrm{Min}} \left[\frac{1}{2} Y^T Q.Y + \frac{1}{2} U^T R.U + \frac{\partial V}{\partial Y} (AY + BU) \right] \tag{3.136}$$

con la condición de contorno:

$$V(Y_1, t_1) = 0 \tag{3.137}$$

Probaremos una solución de la forma

$$V(Y, t) = \frac{1}{2} Y^T.P(t).Y \tag{3.138}$$

donde P(t) es una matriz simétrica de orden n x n.

Llevando este resultado a (3.136) se obtiene:

$$0 = \frac{1}{2} Y^T \dot{P} Y + \underset{\{U(t)\}}{\mathrm{Min}} \left[\frac{1}{2} Y^T Q Y + \frac{1}{2} U^T R U + Y^T P (AY + BU) \right] \tag{3.139}$$

El valor de U que minimiza (3.139) se obtiene resolviendo:

$$U^T.R + Y^T.P.B = 0 \tag{3.140}$$

Despejando de la ecuación anterior el valor de U, éste se expresa:

$$U = - R^{-1} B^T.P.Y \tag{3.141}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (3.139) y teniendo en cuenta que:

$$Y^T.P.A.Y. = \frac{1}{2} Y^T(P.A + A^T.P)Y \qquad (3.142)$$

tendremos:

$$0 = Y^T(\dot{P} + Q + P.A + A^TP - P.B^T.R^{-1}.B.P)Y \qquad (3.143)$$

Esta expresión será cierta si P(t) se elige como la solución de la ecuación Riccati del problema anterior.

Por tanto, se observa que la aplicación de la Programación Dinámica nos lleva a una función de control feedback que es idéntica a la determinada con las técnicas del Principio de Máximo. En este caso la ecuación de Bellman se transforma en una ecuación Riccati.

3.5. INTERRELACIONES DEL PRINCIPIO DE MAXIMO DE PONTRYAGIN CON EL CALCULO DE VARIACIONES Y LA PROGRAMACION DINAMICA

Como ya se ha comentado en distintos puntos de nuestro trabajo, el Cálculo de Variaciones y la Programación Dinámica son junto al Principio de Máximo de Pontryagin las tres aproximaciones teóricas que constituyen lo que a nivel general se denomina como Teoría del Control Optimo.

Las dos primeras corrientes, analizadas de forma esquemática en los Anexos A y B de esta Tesis, no sólo cuentan a efecto de métodos alternativos de solución en determinados problemas, sino que además el Cálculo de Variaciones y la Programación Dinámica permiten, a partir de transformaciones adecuadas, obtener las condiciones necesarias del Principio de Máximo de Pontryagin.

En este sentido, a lo largo de este apartado se intenta estudiar a partir de los Anexos y de las cuestiones tratadas en el Capítulo I un problema formulado en términos de cada una de las dos aproximaciones para alcanzar, mediante sucesivas matizaciones teóricas, las condiciones necesarias del Principio de Máximo.

3.5.1. El Principio de Máximo y el Cálculo de Variaciones (1)

Tal como se señalaba en la introducción general de este trabajo, lo que denominamos "Principio de Máximo de Pontryagin" no es más que los resultados más avanzados (o modernos) de la aproximación teórica conocida como "Cálculo de Variaciones". En este sentido, el Principio de Máximo significó, por un lado, la posibilidad de solucionar bastantes problemas planteados y no resueltos por el Cálculo de Variaciones; y, por otro, la flexibilidad de bastantes condicionamientos que sobre las funciones intervinientes exigía la aplicación del Cálculo de Variaciones.

En este orden de cosas, el problema de control planteado en el Capítulo I difiere del problema más simple del Cálculo de Variaciones en una serie de aspectos, tales como:

a) Las variables de estado no pueden variar independientemente de las variables de control. En efecto, una vez que la función control se selec

---

(1) Un trabajo importante en este sentido es el realizado por Hestenes (1965)

ciona, la trayectoria temporal de las funciones estado está completamente determinada por el sistema dinámico.

b) El Cálculo de Variaciones conlleva una complejidad operativa adicional respecto al Principio de Máximo. Esta se basa en que el Cálculo de Variaciones ha de resolver una ecuación diferencial de segundo orden (que puede transformarse en un sistema de ecuaciones de primer orden), mientras que el Principio de Máximo se plantea como un sistema de ecuaciones de primer orden.

c) Las variables de control no necesitan ser funciones contínuas, basta con que sean contínuas a trozos.

Dado que el objetivo de este apartado es analizar la conexión que existe entre la denominada Teoría clásica (Cálculo de Variaciones) y la Teoría moderna (Principio de Máximo), vamos a centrarnos en principio en la conversión de un problema de control sin restricciones en uno variacional (1), ayudándonos

---

(1) En Miller (1979) puede encontrarse el problema inverso, esto es, la conversión del problema clásico en uno de control.

para ello de los resultados que se han derivado en el Capítulo I y en el Anexo A. En este sentido, demostraremos que los dos problemas son equivalentes si el espacio de control $\overline{U}_p$ es un subconjunto abierto del espacio Euclidiano R^m, ya que cuando ésto sucede todas las condiciones necesarias familiares al Cálculo de Variaciones (en particular la condición de Weierstrass) se deducen del Principio de Máximo. Por otro lado, cuando $\overline{U}_p$ es un subconjunto cerrado del espacio R^m, entonces el Cálculo de Variaciones no sirve, y es aquí donde entra el Principio de Máximo. Es pues en este punto donde se encuentra la importante ventaja del Principio de Máximo, y lo que justifica el éxito alcanzado por el mismo, ya que a la hora de llevar la teoría al mundo real lo normal es enfrentarnos a problemas con restricciones de desigualdad sobre las funciones de control.

Una vez analizadas a grandes rasgos las ventajas del Principio de Máximo respecto al Cálculo de Variaciones, pasemos pues a estudiar la equivalencia de ambas corrientes en un problema de optimización dinámica elemental.

En este sentido, sea $Y(t)$ el vector de funciones de estado $y_i(t)$, $\forall i \ / \ i = 1, \ldots, n$, donde $Y(t)$ es contínua con un número finito de esquinas para todo t (esto es, cada $y_i(t)$, $\forall i \ / \ i = 1, \ldots, n$ es una función contínua con esquinas).

Para el problema en cuestión la función vectorial $Y(t)$ habrá de satisfacer:

$$\begin{aligned} Y(t_1) &= Y_1 \\ Y(t_o) &= Y_o \end{aligned} \qquad (3.144)$$

o, en la terminología del Cálculo de Variaciones: $Y(t)$ es la función que une los puntos especificados (t_o, Y_o) y (t_1, Y_1).

Además, existe un vector de m funciones de control ($u_j(t)$, $\forall j \ / \ j = 1, \ldots, m$) que son contínuas a trozos de t, $\forall t \ / \ t_o \leqslant t \leqslant t_1$.

Las ecuaciones de transición (o sistema dinámico del modelo) vienen expresadas por n ecuaciones que en forma vectorial responden a:

$$\dot{Y} = G(t, Y, U) \qquad (3.145)$$

Por último, en el problema de control está presente una medida de la efectividad del control, esto es, un funcional objetivo que se expresa:

$$I(Y,U) = \int_{t_o}^{t_1} F(t,Y,U)\ dt \qquad (3.146)$$

donde F(...) para este problema se exige que tenga primeras derivadas contínuas respecto a sus argumentos.

El problema así planteado nos lleva al conjunto de condiciones siguiente:

1) $-\dot{\Lambda} = H_Y$ (3.147)

2) $H_U = 0$ (3.148)

o, más concretamente,

$$H(t,Y(t),\Lambda(t),U(t)) = \underset{\{U \in \overline{U}_p\}}{\text{maximizar}}\ H(t,Y(t),\Lambda(t))$$

3) $\dot{Y} = G(t, Y, U)$ (3.149)

donde H es la función Hamiltoniana definida en (1.9) por:

$$H = F(t,Y,U) + \Lambda(t)G(t,Y,U) \qquad (3.150)$$

siendo $\Lambda(t)$ el vector de variables auxiliares que se suponen contínuas para todo t.

Si para el problema formulado el sistema dinámico fuera

$$\dot{Y} = U \tag{3.151}$$

en vez de (3.145), la función (3.150) sería:

$$H = F(t,Y,U) + \Lambda . U \tag{3.152}$$

Este nuevo sistema (3.151) llevaría a que las condiciones (3.147), (3.148) y (3.149) se transformaran en:

1') $- \dot{\Lambda} = H_Y$ donde $H_Y = F_Y$ (3.153)

2') $H_U = 0$, ó bien $F_U + \Lambda(t) = 0$ (3.154)

Si operamos en esta condición, tendremos:

$$\Lambda(t) = - F_U = - \frac{\partial F(t,Y,U)}{\partial U} \tag{3.155}$$

Además, integrando (3.153),

$$\Lambda(t) = - \int_{t_o}^{t} \frac{\partial F(T,Y(T),U(T))}{\partial Y} dT \tag{3.156}$$

Igualando (3.155) y (3.156) e incorporando el nuevo sistema dinámico (3.151), llegamos a:

$$\frac{\partial F(t,Y(t),\dot{Y})}{\partial \dot{Y}} = \int_{t_o}^{t} \frac{\partial F(T,Y(T),U(T))}{\partial Y} \, dT \tag{3.157}$$

donde (3.157), para todo t tal que $t \in [t_o \quad t_1]$, se satisface.

Diferenciando (3.157) respecto al tiempo (bajo el supuesto de F e Y doblemente diferenciables) obtenemos la ecuación de Euler en la forma ordinaria:

$$\frac{\partial F(t,Y(t),\dot{Y})}{\partial Y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F(t,Y(t),\dot{Y})}{\partial \dot{Y}} = 0 \tag{3.158}$$

Tal como se demuestra en el Anexo A, esta primera condición necesaria, o ecuación Euler-Lagrange, debe satisfacerse entre las esquinas de la función óptima. Además, en las esquinas de la función solución se han de verificar las condiciones de esquina de Weierstrass-Erdmann. Esto es, si según la moderna teoría del control la función vector $\Lambda(t)$ y la función Hamiltoniana H son funciones contínuas del tiempo, y además, por (3.153)

$$\Lambda = - \frac{\partial F}{\partial \dot{Y}} \tag{3.159}$$

entonces la función H podrá expresarse como

$$H = F - \frac{\partial F}{\partial \dot{Y}} \cdot \dot{Y} \tag{3.160}$$

De aquí, si

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{Y}} \tag{3.161}$$

y

$$F - \frac{\partial F}{\partial \dot{Y}} \dot{Y} \tag{3.162}$$

son funciones contínuas de t, entonces (3.161) y (3.162) tienen que ser contínuas a través de las esquinas de la solución óptima.

El resto de condiciones necesarias del Cálculo de Variaciones también son derivables del Principio de Máximo, bajo el supuesto de que la función integrando F(...) tiene derivadas parciales de segundo orden contínuas con respecto a U. En este sentido, vamos a derivar la condición de Legendre.

Si por (3.152) sabemos que

$$H(t,Y(t),\Lambda(t),U(t)) = F(t,Y(t),U(t)) + \Lambda.U$$

alcanza un máximo en U(t), entonces se verificará que la matriz:

$$\frac{\partial^2}{\partial U^2} H(t, Y, U, \Lambda) = \frac{\partial^2 F(t, Y, U)}{\partial U^2} \qquad \forall t / t \in [t_o t_1]$$

(3.163)

sea definida o semidefinida negativa. Como el sistema (3.151) debe satisfacerse $\forall t \ / \ t \in [t_o \, , \, t_1]$, entonces la condición de Lagrange se podrá expresar:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{Y}^2} < 0 \qquad \forall t \in \{t_o , t_1]$$

(3.164)

o bien,

$$F_{\dot{Y}\dot{Y}} \leqslant 0 \qquad (3.165)$$

Esta condición que es necesaria para que la función vectorial Y(t) sea un extremo del funcional $I(Y) = \int_{t_o}^{t_1} F(t,Y,\dot{Y})\, dt$, se denomina condición de Legendre (1).

---

(1) Un estudio más completo de esta condición se hace en el Anexo A de este trabajo.

Por último, queda estudiar la condición de Weierstrass. Si por el sistema (3.151) U(t) es el control óptimo, y por el Principio de Máximo se sabe que para cualqüier otro control óptimo $\dot{Z}$ perteneciente a R^m tendría que ser verdad que:

$$H(t,Y,\dot{Y},\Lambda) \leqslant H(t,Y,\dot{Z},\Lambda) \qquad (3.166)$$

y si por la definición de función Hamiltoniana se sabe que:

$$H(t,Y,\dot{Y},\Lambda) = F(t,Y,\dot{Y}) + \Lambda.\dot{Y} \qquad (3.167)$$

$$H(t,Y,\dot{Z},\Lambda) = F(t,Y,\dot{Z}) + \Lambda.\dot{Z} \qquad (3.168)$$

entonces (3.166) puede expresarse en los siguientes términos:

$$F(t,Y,\dot{Y}) + \Lambda.\dot{Y} \geqslant F(t,Y,\dot{Z}) + \Lambda.\dot{Z} \qquad (3.169)$$

Utilizando la condición (3.153), (3.169) se transforma en:

$$F(t,Y,\dot{Y}) - \dot{Y}\,\frac{\partial F}{\partial \dot{Y}} \geqslant F(t,Y,\dot{Z}) - \dot{Z}\,\frac{\partial F}{\partial \dot{Y}} \qquad (3.170)$$

Reordenando los términos de la ecuación (3.170) ésta puede reescribirse como:

$$F(t,Y,\dot{Z}) - F(t,Y,\dot{Y}) - F_{\dot{Y}}(Y,\dot{Y},t).(\dot{Z} - \dot{Y}) \leqslant 0 \tag{3.171}$$

Por las condiciones necesarias del Cálculo de Variaciones se sabe que el lado izquierdo de (3.169) es la función exceso de Weierstrass (E) con x en vez de t; por tanto, la condición necesaria de Weierstrass para un máximo equivale a:

$$E(t,Y,\dot{Y},\dot{Z}) = F(t,Y,\dot{Z}) - F(t,Y,\dot{Y}) - F_{\dot{Y}}(\dot{Z}-\dot{Y}) \leqslant 0 \tag{3.172}$$

Por tanto, podemos concluir que para soluciones óptimas interiores, que son por otro lado las únicas para las que la ecuación de Euler es una condición necesaria, las aproximaciones teóricas del Cálculo de Variaciones y del Principio de Máximo conducen a resultados equivalentes, aunque a primera vista el Cálculo de Variaciones presenta una mayor complejidad operativa. Esto es, así como las condiciones necesarias obtenidas a partir del Principio de Máximo son un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, la ecuación de Euler-Lagrange del Cálculo de Variaciones es una ecuación diferencial de segundo orden, aunque con ayuda de matemáticas elementales esta ecuación puede transformarse en un sistema de ecuaciones de primer orden.

La equivalencia desaparece cuando nos enfrentamos a un problema de control con restricciones de desigualdad sobre las variables de control. Esto es, cuando $\bar{U}_p$ no es un conjunto abierto de R^m. En estos casos la ecuación de Euler-Lagrange no nos proporciona la solución óptima, y el recurso al Principio de Máximo se hace indispensable (1).

Como último punto de este análisis comparativo Principio de Máximo-Cálculo de Variaciones, vamos a estudiar un problema variacional con restricciones globales.

---

(1) El ejemplo utilizado por Pontryagin (1962) en la página 241 pone claramente de manifiesto la limitación del Cálculo de Variaciones en la resolución de un problema de control con $\bar{U}_p$ como un conjunto cerrado de R^m. Su demostración se basa en la condición de Weierstrass.

Un problema variacional con restricción isoperimétrica puede formularse como uno de control óptimo con restricciones terminales mediante variables adicionales.

En este sentido, sea el problema clásico de determinar la función y(t) que con una longitud de arco dada (k) maximiza el área entre dos puntos sobre el eje del tiempo (en nuestro caso el tiempo se corresponde con la variable definida en el Anexo sobre Cálculo de Variaciones como x). Reescribiendo el problema, tendremos:

i) Dadas las condiciones:

$$\dot{y} = U(t)$$

$$y(t_o) = 0$$

$$y(t_1) = 0$$

$$\int_{t_o}^{t_1} \sqrt{1 + U(t)^2} \quad dt = k$$

ii) maximizar el funcional

$$I = \int_{t_o}^{t_1} y(t)\ dt$$

La restricción isoperimétrica puede incorporarse introduciendo una variable de estado adicional z(t) que satisface:

$$\dot{z}(t) = \sqrt{1 + U(t)^2}$$

$$z(t_o) = 0$$

$$z(t_1) = k$$

Entonces el vector de estado estará formado por las funciones y(t) y z(t).

Las ecuaciones adjuntas son para este problema:

$$\dot{\lambda}_1(t) = 1$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = 0$$

Consiguientemente, $\lambda_1(t)$ es lineal en t, y $\lambda_2(t)$ es constante. El Hamiltoniano es:

$$H = \lambda_1(t).U(t) + \lambda_2.\sqrt{1 + U(t)^2} + y(t)$$

La condición de máximo es:

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1(t) + \frac{\lambda_2 U(t)}{\sqrt{1 \quad U(t)^2}} = 0$$

Consiguientemente, podemos concluir que la curva y(t) satisface una ecuación de la forma

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = A + B.t$$

para algunas constantes A y B.

3.5.2. El Principio de Máximo y la Programación Dinámica

Los enfoques teóricos del Principio de Máximo y de la Programación Dinámica se aplican al mismo tipo de problemas, aunque difieren en la forma y alcance (1); no obstante, parece oportuno investigar la conexión que entre ellos existe, y hasta qué punto la Programación Dinámica implica las condiciones necesarias del Principio de Máximo.

Tal como se señala en el Anexo B de este trabajo, la función de criterio óptimo de la Programación Dinámica se define como el valor óptimo del funcional objetivo para la trayectoria que comienza en el estado Y en el tiempo t, y esta función así definida será el denominador común en la tarea de derivar la ecuación de Bellman, ecuación que queda expresada como:

---

(1) El enfoque de la Programación Dinámica está desarrollado, aunque no con la extensión y detalle que se merece, en el Anexo B. Las referencias bibliográficas más importantes se encuentran recogidas a lo largo de esta sección y del Anexo citado.

$$- \frac{\partial V(Y,t)}{\partial t} = \underset{\{U(t)\}}{\text{máx.}} \left[F(Y,U) + \frac{\partial V(Y,t)}{\partial Y} G(Y,U) \right] \tag{3.173}$$

con la condición límite asociada:

$$V(Y_1, t_1) = Q(Y)$$

La conexión entre estas dos corrientes teóricas se ha puesto de manifiesto por diferentes autores (1), y en sus desarrollos la premisa común es la ecuación que expresa el vector de variables auxiliares como tasa de variación del funcional objetivo óptimo con respecto a un pequeño cambio en el vector de variables de estado, esto es,

$$\frac{\partial V}{\partial Y} = \Lambda(t) \tag{3.174}$$

---

(1) Entre estos autores se encuentran todos los que utilizan el Principio de Optimalidad como instrumento teórico en la derivación de las condiciones necesarias del Principio de Máximo. Véase Intriligator (1974), Fel'dbaum (1975), Sethi y Thompson (1981) y Luenberger (1975).

Puede observarse que la función V en Programación Dinámica es el valor máximo (u óptimo en general) del funcional I que empieza en el estado Y y en el tiempo t.

Centrándonos ya en el tema que nos ocupa: la derivación de las condiciones necesarias del Principio de Máximo a partir de la ecuación de Bellman, tendremos lo siguiente:

Según la ecuación (3.174), la expresión (3.173) podrá formularse como

$$- \frac{\partial V}{\partial t} = \underset{\{U(t)\}}{\text{máx.}} \left[F(Y,U,t) + \Lambda . G(t,Y,U) \right] =$$

$$= \underset{\{U(t)\}}{\text{máx.}} \left| H(t,\ Y,\ U,\ \Lambda) \right| \qquad (3.175)$$

El lado derecho de (3.175) no es más que el Principio de Máximo. Si suponemos que U es el control óptimo, esto es, es el control que maximiza H(...), $\forall\ t \ /\ t \in [t_o , t_1]$, entonces (3.175) podrá expresarse como

$$- \frac{\partial V}{\partial t} = H(t,\ Y,\ U,\ \frac{\partial V}{\partial Y}) \qquad (3.176)$$

conocida como ecuación Hamilton-Jacobi (1). Derivando con respecto al estado:

$$- \frac{\partial^2 V}{\partial Y \partial t} = \frac{\partial H}{\partial Y} + \frac{\partial I^2}{\partial Y^2} \cdot \frac{\partial H}{\partial \Lambda} \qquad (3.177)$$

Si, por otro lado, derivamos (3.174) respecto al tiempo, tendremos:

$$\dot{\Lambda} = \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial Y} \qquad (3.178)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial Y} = \dot{\Lambda} - \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \cdot \dot{Y} \qquad (3.179)$$

Igualando términos en (3.177) y (3.179) llegamos a obtener:

$$\frac{\partial H}{\partial Y} = - \dot{\Lambda} \qquad (3.180)$$

$$\dot{Y} = \frac{\partial H}{\partial \Lambda} \qquad (3.181)$$

---

(1) Véase Sethi y Thompson (1981).

que junto a (3.175) nos dan las condiciones necesarias del Principio de Máximo, mientras (3.174) explicita la conexión de las cantidades $\Lambda(t)$ con la función de criterio óptimo (1).

Tal como se ha mostrado, la ecuación de Bellman más la condición de contorno implican las condiciones necesarias del Principio de Máximo. Ahora bien, el Principio de Máximo no implica la ecuación de Bellman, ya que éste no exige que el funcional objetivo sea doblemente diferenciable (2).

A la vista de las conclusiones alcanzadas en esta sección, se puede apuntar cómo el requisito de diferenciabilidad del funcional criterio óptimo es la única diferencia entre los problemas formulados en Programación Dinámica y los correspondientes al Principio de Máximo. A raiz de estos resultados cabe pre-

---

(1) Además tendríamos la condición terminal:

$$\Lambda(t_1) = \frac{\partial V}{\partial Y_1}$$

que nos indica un funcional objetivo del tipo de Bolza.

(2) Véase Pontryagin (1962), pág. 71.

guntarse el por qué de la existencia de dos teorías paralelas y aparentemente diferentes, siendo que ambas tratan la misma clase de problemas. La respuesta puede encontrarse en parte en las razones que a continuación se señalan.

En primer lugar, la Programación Dinámica está basada esencialmente en el Principio de Optimalidad de Bellman, y se dirige de una forma directa a determinar la trayectoria óptima del sistema sin tener en cuenta ninguna propiedad total de ésta, sino únicamente lo afirmado por el Principio de optimalidad de que todo segmento final de la trayectoria óptima es también una trayectoria óptima, mientras que la teoría del control óptimo (Principio de Máximo) trata fundamentalmente de encontrar las propiedades totales que deben cumplir las trayectorias óptimas. En este sentido, se puede afirmar que el Principio de Máximo es más teórico, y la Programación Dinámica más práctica.

Otra consideración importante es que la Programación Dinámica nació más en conexión con los sistemas económicos, mientras que el control óptimo estuvo ligado a los sistemas físicos y químicos. Esta característica dió lugar a que la mayor parte de los sistemas en tiempo discreto fueran tratados por Programación Dinámica, mientras que los formulados en tiempo contínuo lo fueron por la Teoría del control óptimo.(1).

Como se desprende de un estudio minucioso de los enfoques teóricos, ambos conducen a unas técnicas de resolución de problemas de optimización dinámica. El Principio de Máximo se reduce a resolver un sistema de ecuaciones (diferenciales si es formulado en tiempo contínuo o de ecuaciones en diferencias finitas si t es discreto); la Programación Dinámica nos lleva a una sola ecuación: la ecuación de Bellman. No obstante, el Principio de Máximo comporta algunas ventajas sobre la Programación Dinámica. Estas ventajas se materializan en que resuelve la ecuación de Bellman en dos etapas: la primera, para determinar las funciones de control óptimo como función de las variables auxiliares; la segunda determina las trayectorias temporales de las variables auxiliares. Siendo además

(1) Una revisión de las aplicaciones de estas dos corrientes teóricas puede encontrarse en Fel'dbaum (1975)

la primera etapa la que verdaderamente aporta información sobre la naturaleza del problema. En cambio, la Programación Dinámica exige la resolución de la ecuación de Bellman de una sola vez. No obstante, una ventaja importante de la Programación Dinámica respecto al Principio de Máximo es que permite obtener controles feedback. Una vez que V es conocida, la maximización con respecto a U permite obtener el valor de U que se emplearía si el estado es Y en tiempo t.

Como resumen de este análisis podemos concluir que si bien el Principio de Máximo es más valioso para dar una solución analítica de un problema de control, la Programación Dinámica es más fructífera desde el punto de vista práctico. Ahora bien, para soluciones numéricas los dos enfoques llevan a programas de ordenador similares, exigiendo la Programación Dinámica la resolución aproximada de una ecuación diferencial parcial no lineal y el Principio de Máximo una solución aproximada de un problema de valores de contorno.

CAPITULO 4

APLICACION DEL PRINCIPIO
DE MAXIMO DE PONTRYAGIN
AL MONOPOLIO ESPAÑOL DE TABACOS

4.1. INTRODUCCION

Las aplicaciones de la Teoría del Control a distintas parcelas de la realidad económica abarcan una amplia gama de modelos y sistemas que están diferenciados tanto por las cualidades teóricas de los mismos como por los objetivos elegidos para la investigación.

Al intentar en este trabajo llevar a cabo una aplicación práctica, dos objetivos aparecerán como fundamentales para lograr una imbricación con la aproximación teórica realizada en los Capítulos precedentes. Por un lado, que esta parte práctica, por sus planteamientos y esquemas, constituya una ilustración representativa del tipo de aplicaciones que permite la Teoría del Control Optimo, mostrando la considerable gama de posibilidades prácticas de la misma; por otro, los ejemplos elaborados deberán poseer una representatividad desde el punto de vista de las posibilidades de la Teoría del Control en su aplicación a la economía española.

Este doble objetivo llevó lógicamente a algunas consideraciones y elecciones previas; se trataba en última instancia de elegir un campo de aplicación y un modelo teórico dentro de la Teoría del Control que satisfacieran cumplidamente los requisitos de representatividad y sencillez dentro de esta Teoría.

Conviene sin embargo que previamente recalquemos una de las características básicas de las aplicaciones de la Teoría del Control a la realidad económica: Como la misma definición indica, la existencia de variables susceptibles de ser controladas aparece como requisito básico para la aplicación de dicha teoría; las parcelas de la realidad económica susceptibles de ser sometidas a estas técnicas deben poseer ciertas características que se centran básicamente en la existencia de alguna variable que sea susceptible de ser controlada por el tomador de decisiones, a la vez que guíe al sistema por el sendero óptimo marcado.

En la parte teórica de nuestro trabajo hemos desarrollado y formulado diferentes problemas de control óptimo en tiempo contínuo, esto es, bajo el supuesto de que sus variables evolucionan de forma contínua a lo largo del tiempo y por tanto sus valores están definidos en cualquier instante t perteneciente al intervalo temporal en estudio. La descripción total del problema, esto es, las condiciones de contorno, el sistema de ecuaciones de transición y las restricciones sobre las variables relevantes, nos permitía tras la aplicación del Principio de Máximo llegar a obtener un conjunto de condiciones necesarias de optimalidad cuya solución no es más que la expresión analítica de las funciones de control y de estado óptimas para el problema de maximización de un funcional objetivo dado.

Las etapas teóricas brevemente descritas en líneas anteriores y más específicamente tratadas a lo largo de los Capítulos I y II de este trabajo, son elementos indispensables a la hora de plantearnos lo que podemos llamar nuestra verdadera aportación personal.

Si bien es cierto, como ya comentábamos en la Introducción General, que el Principio de Máximo ha sido objeto de numerosas aplicaciones a diferentes ra mas de la actividad económica (1), también es cierto que la utilización de esta aproximación teórica no ha sido muy extendida a modelos numéricos específicos relativos a mercados en el sentido microeconómico (monopolio, duopolio, competencia monopolística, etc.). En otras palabras, si por un lado es muy abundante la literatura existente sobre modelos teóricos de crecimien

---

(1) Dentro de las principales aplicaciones de la teoría económica se encuentran las relacionadas con la Política económica (véase, por ejemplo, Chow (1973), Sakakibara (1970)) y con el análisis del comportamiento de la empresa en un contexto dinámico (Algunos aspectos generales pueden analizarse en Takayama (1967-1); como ejemplo de aplicaciones específicas véase: Modigliani (1955), sobre planeamiento de la producción e inventarios, y Dhrymes (1962), con algunas originales implicaciones sobre la actividad de "investigación y desarrollo" de la empresa).

Sin embargo, los campos de aplicación de la Teoría del Control Optimo han llegado a extenderse a otras parcelas diversas de la economía, como el comercio internacional (Vousden (1974)).

to óptimo, localización óptima de inversión, tamaño óptimo de ciudades, etc., por otro es escaso el número de trabajos publicados que compartan nuestro objetivo: la optimización en mercados de competencia imperfecta.

Un caso concreto de este tipo de mercado es el que se conoce como monopolio; es decir, y en términos muy esquemáticos, mercados de bienes o servicios caracterizados del lado de la oferta por la existencia de un solo agente económico (un solo productor u oferente) (1).

La razón de que este tipo de mercado constituya un buen campo de aplicación de la Teoría del Control es obvia: por un lado, el número de agentes económicos que aparecen en él, y, como se deduce lógicamente de lo anterior, por otro el agente que en cuestión centraliza la oferta de un producto, que posee una influencia vital en el mercado, es decir, posee

---

(1) Por encontrarse fuera del alcance de nuestro trabajo, nos referimos aquí exclusivamente al monopolio en su acepción más generalizada, sin considerar el caso de monopsonio o monopolio de demanda.

una capacidad mayor de control sobre aquél. De acuerdo con distintos objetivos, el agente monopolista podrá entonces controlar en el mercado distintos elementos del mismo; fundamentalmente, y por centrarnos de forma más clara en el mundo real, esta acción se llevará a cabo, bien sobre el precio del producto, bien sobre la cantidad del mismo (1).

Por otro lado, es evidente la importancia en la economía española de mercados regidos por el sistema de monopolio en distintas clases e intensidades; son particularmente relevantes los casos de monopo-

---

(1) Un ejemplo de aplicación de la teoría del control óptimo a un monopolio está recogido en Miller(1979).

También resultan ilustrativos, aunque parten de enfoques distintos al que aquí nos ocupa, los trabajos de: Landsberger (1976), que analiza la conducta óptima de un monopolista que intenta maximizar un funcional objetivo con dos variables de elección (ingresos y beneficios); Takayama (1967), que utiliza las condiciones de Khun-Tucker en el estudio de un monopolio regulado y las implicaciones en relación al efecto Averech-Johnson; y Kamien y Schwartz (1978), que aplican la programación dinámica al estudio de la conducta óptima del monopolio en relación a la innovación tecnológica.

lios controlados por el Estado. Estas prácticas de monopolio por parte del Estado no se restringen sólo a la esfera de los servicios públicos, sino que abarca también otros productos de relevancia singular en la economía, como la distribución y venta de petróleo, o el caso del tabaco.

Los planteamientos y evaluaciones iniciales abocaron precisamente a plantear las posibilidades de manejar alguno de estos casos típicos de monopolio estatal como CAMPSA y TABACALERA.

Respecto al primero de ellos, la importancia crucial del producto monopolizado en la economía española era clara, pero, por otro lado, su estudio se encontraba sometido a grandes dificultades debido a la incidencia en el mismo de distintos factores de política internacional y nacional, y de otra índole, que limitaban grandemente la aplicación de modelos predictivos al mismo.

La elección recayó pues en el monopolio de Tabacos que, si bien no presentaba la importancia estratégica de CAMPSA en la economía española, ofrecía en cambio ventajas a la hora de aplicar las técnicas, sobre todo el hecho de que las variaciones en el mercado del producto dependen de una serie relativamente limitada de elementos, y por lo mismo aumentan las posibilidades de control, al menos desde la perspectiva de este trabajo.

A estos factores, de índole si se quiere teórica, hay que añadir como causa determinante de la elección la disponibilidad de las fuentes estadísticas necesarias para el desarrollo del trabajo. A este respecto, queremos manifestar aquí nuestro agradecimiento al Servicio de Estudios de Tabacalera, que nos ha facilitado toda la información estadística de base necesaria para la realización de este trabajo.

Una vez hecha la selección sobre el modelo numérico, el mercado de Tabacos español, nuestro interés se centrará en la aplicación del Principio de Máximo. La utilización de esta técnica de optimización dinámica en el objetivo que se señale para el monopolio requerirá la formulación y explicitación de hipótesis y elementos que nos lleven a la obtención de unas políticas que tengan sentido económico, o, lo que es lo mismo, que corroboren la validez de esta teoría.

Si, tal como se estudia en la Teoría del Control Optimo, la información de partida para un proble ma de control puede ser muy diversa (1), será conveniente el análisis mediante el Principio de Máximo, utilizando diferentes variantes o restricciones sobre la variable de estado en el instante final. En este sentido, se analizará en primer lugar un problema de maximización de Ingresos (que es el objetivo fijado para la empresa) con precio final libre, para pasar a continuación al estudio del mismo objetivo pero con restricciones sobre el precio final. La realización de este segundo problema obedece por un lado a un intento de buscar un mayor sentido económico a nuestras conclusiones y, por otro, a mostrar cómo las cuestiones teóricas desarrolladas en los Capítulos I y II de este trabajo son perfectamente aplicables a nuestro modelo. Esto es, veremos cómo la presencia de la restricción de estado terminal nos lleva a una función de estado contínua con al menos una esquina, a ver gráficamente cómo en el momento en que se da esa esquina se produce un salto en la función de control óptima, y por último a observar el cambio de signo en la evolución temporal de las variables auxiliares.

---

(1) Nos referimos al problema con condiciones extremas variables.

4.2. OBJETIVOS Y PLANTEAMIENTO

Una vez explicitado en las páginas anteriores el campo de trabajo sobre el que se centrará nuestro modelo empírico (el monopolio de Tabacos español), es preciso ahora concretar el objetivo del mismo.

Como en cualquier sistema de organización de mercado de tipo monopolista, en el caso que nos ocupa existen unos objetivos específicos que guían la actuación de la empresa; fundamentalmente estos objetivos son dos:

- la maximización del beneficio, entendido éste como diferencia entre ingresos y costes (1),
- o bien, en otras ocasiones, la maximización de los ingresos (ventas).

Escapa al alcance de estas líneas analizar las distintas teorías que fundamentan la elección de

---

(1) El carácter esquemático de este apartado parece no precisar de mayores comentarios sobre los distintos componentes explícitos e implícitos de ingresos y costes.

uno u otro objetivo por una empresa monopolista (2). Sin embargo, no estará de más señalar que la elección del segundo objetivo se produce generalmente, o bien cuando la empresa ha alcanzado un determinado nivel de beneficios, o bien cuando existen determinadas partidas de los costes cuya estimación exigiría supuestos que limitarían en gran medida la validez de los resultados. Este es precisamente el motivo que ha llevado en nuestro caso a tomar como objetivo de nuestro trabajo el segundo de los mismos, es decir, la maximización de los ingresos.

Teniendo en cuenta que en la definición más clásica de ingresos éstos siempre corresponden al producto de las ventas realizadas del bien por el precio de éste, el fijar el objetivo de maximizar ingresos implica obviamente determinar cantidades y/o precios respectivos que llevan a lograr el objetivo.

---

(1) Un tratamiento bastante completo de la teoría del monopolio puede verse, por ejemplo, en Bilas

En definitiva, y por plantear el objetivo de este trabajo en términos más formales, podríamos concretarlo de la siguiente forma:

Determinar los precios(y/o cantidades) óptimos del bien (tabaco) que maximizan los ingresos del Monopolio de Tabacos en un contexto dinámico.

Como es usual en este tipo de planteamientos, el instrumento o marco del que se parte para la determinación de precios y cantidades óptimos es la función de demanda a cuya estimación y características se dedica el apartado siguiente.

Es necesario precisar también que el estudio se centra exclusivamente sobre uno de los dos tipos de productos que elabora y comercializa Tabacalera, el "Tabaco negro" (el otro producto es, como se sabe, la variedad conocida como tabaco rubio). La razón de haber elegido dicha variedad es doble: por un lado, al no existir una homogeneidad exacta entre ambas variedades en cuanto a los elementos que las definen (marcas, precios relativos de los mismos, hábitos de consumo, aparición de nuevas marcas, etc.) la conside ración conjunta de ambas implicaba una notable comple jidad (1). Por otro lado, es necesario apuntar que la variedad elegida, tabaco negro, supone (datos de 1979) cerca del 80% de las ventas totales del mercado de ci garrillos, por lo que su representatividad e importan cia están fuera de dudas.

Evidentemente esta elección supone el no considerar las implicaciones de la demanda y precios de una variedad sobre la otra; es decir, en términos de la función de demanda que más tarde se planteará, supone el considerar que la demanda de tabaco negro no está influída por el precio del bien sustitutivo, en este caso el tabaco rubio (2).

---

(1) En especial, la aparición en 1975 de la marca For tuna ha supuesto un cambio cualitativo y cuantita tivo de fundamental importancia en el mercado nacional de tabaco.

(2) A pesar de la limitación aparente de este supuesto sobre la validez de la función planteada, es conveniente precisar que un análisis detallado de las series de precios y ventas de las dos varieda des de tabaco pone de manifiesto una escasa influencia del precio del tabaco rubio sobre las ventas de tabaco negro. Esto justifica la no aparición del precio del tabaco rubio, P_R, en la fun ción de demanda de cigarrillos negros.

4.3. ESTIMACION DE LA FUNCION DE DEMANDA

4.3.1. Caracterización Previa de las Variables

Vamos a explicar a continuación en términos generales cuáles son las variables explicativas fundamentales que definen la función de demanda de tabaco negro.

Recurriendo a los supuestos clásicos de la teoría económica sobre las variables que intervienen en una función de demanda, se ha supuesto que las variables fundamentales que determinan la correspondiente a tabaco negro son: precio del tabaco negro, precio del tabaco rubio (sustitutivo más directo), niveles de renta disponible. Junto a éstas, que pueden considerarse como fundamentales, habría que situar a otra serie de variables de importancia menor, entre las que cabe destacar: hábitos de consumo, publicidad, gustos, distribución, características y tamaño de la población, etc.

En términos esquemáticos, podríamos plantear la siguiente función:

$$D_N = f(P_N, P_R, Y, K)$$

siendo:

D_N : Demanda de tabaco negro

P_N : Precio " " "

P_R : " " " rubio

Y : Nivel de renta

K : Conjunto diverso de variables

Centrándonos pues en los que hemos denominado como fundamentales, habría que señalar lo siguiente:

i) Precio del propio bien (tabaco negro).-

Si suponemos que el bien tiene un comportamiento normal, esto es, de acuerdo con la ley de demanda, la relación entre el precio y la cantidad sería de signo inverso. Esto es:

$$\frac{\partial D_N}{\partial P_N} < 0$$

ii) Precio del bien sustitutivo (tabaco rubio).-

Como se ha señalado páginas atrás, se supondrá que la relación entre ambos es nula, esto es, que la demanda de tabaco negro no se ve influída por variaciones en el precio del tabaco rubio (1), supuesto basado en observaciones reales. Es decir, la expresión primera quedaría reducida a:

$$D_N = f(P_N, Y, K)$$

iii) Renta (o nivel de).-

Siguiendo también las pautas clásicas, se supone un crecimiento positivo de la demanda con el nivel de renta de los individuos. Es decir,

$$\frac{\partial D_N}{\partial Y} > 0$$

Hasta aquí un análisis muy esquemático y que podríamos calificar de estático. Si nos movemos en un marco dinámico, esto es, considerando las variaciones de las variables y de las relaciones entre las mismas

---

(1) Volvemos a insistir aquí sobre este punto, apoyado en contrastaciones empíricas (véase nota a pie de página). Al mismo tiempo, se obvía por tanto el tema de la relación entre precio de una variedad y de otra, esto es, de los precios relativos, como determinantes de fluctuaciones en la demanda.

a lo largo del tiempo, el esquema original se ve modificado.

Siguiendo los planteamientos más usuales sobre funciones de demanda y oferta dinámicas, "es de esperar que una demanda de este tipo dependa de ciertos elementos especulativos que recogen la visión de los compradores sobre el curso futuro de los precios" (1). Vamos a llamar a esta variable $\dot{P}_N(t)$.

Pero es que además, y como se observa en el estudio del mercado, la demanda del producto que nos ocupa puede verse afectada por un fenómeno singular estrechamente relacionado con la variable especulativa anteriormente definida: Nos referimos a los "rumores" de subida de precios que se producen con mayor o menor antelación a las subidas reales de los mismos precios. Este "rumor" desencadena generalmente una reacción por parte de los expendedores (consumidores en nuestro modelo) hacia el acaparamiento de mercancía y, por lo tanto, el aumento mayor o menor de ventas.

---

(1) La frase entrecomillada corresponde al clásico manual de Allen (1938), (pág. 434), cuyos planteamientos han servido de base para los aquí utilizados.

Pues bien, con la variable $\dot{P}_N(t)$ se intenta explicitar la expectativa general de los demandantes de esta variedad de tabaco en un momento t sobre la variación esperada del precio en base a las expectativas existentes sobre dichas variaciones en el momento t (1).

En definitiva, la función de demanda quedaría:

$$D_N = f(P_N, \dot{P}_N, Y, K)$$

---

(1) A pesar de la aparente irrealidad de esta variable es preciso mencionar que la inclusión de la misma en la estimación de la función de demanda explicó bastantes puntos anómalos que se encontraban en el estudio de los residuos, y que responden a nuestro entender al fenómeno citado de "acaparamiento".

4.3.2. Especificación de las variables

A partir del planteamiento anteriormente formulado de la función de demanda, hay que llegar a una expresión concreta que pueda posteriormente estimarse.

Como siempre, la disponibilidad y características de la información a utilizar es determinante en la especificación de las variables.

En nuestro caso, la información disponible se centraba en una serie mensual de ventas y precios medios (1) respectivos para el período 1972-1978 referente al tabaco negro vendido en España.

El análisis más detallado de la serie de ventas puso de manifiesto la existencia de un componente estacional, por lo que se llevó a cabo un proceso de desestacionalización de dicha serie; para ello se utilizó un programa de ordenador que incorporaba un coeficiente estacional calculado a partir de medias móviles de doce meses. (El Cuadro 2 recoge los coeficientes estacionales para los doce meses).

---

(1) Entendiéndose por precio medio una media ponderada de las distintas marcas de tabaco negro.

Se cuenta entonces con ochenta y cuatro observaciones de pares "cantidad vendida-precio" que constituyen una primera base para la estimación de la función de demanda. El problema reside en que, si bien por un lado la disponibilidad de tal número de observaciones mensuales es muy aceptable para la estimación, por otro condiciona la especificación de las demás variables de la función: no es posible disponer de observaciones mensuales para la venta y otro tipo de variables (las anteriormente calificadas como variable "K").

Este condicionamiento puede superarse en cierta medida utilizando una variable de tendencia para todos los factores distintos del precio, suponiendo por tanto que la venta, la población, etc., varían positivamente respecto al paso del tiempo. En definitiva, las variables "Y" y "K" se sustituirían por una variable t, de forma que $t = 1$ en el período uno, $t = 2$ en el período dos, etc.

Por último, nos resta referirnos a la variable P_N. Como ya se ha señalado, al analizar los residuos se detectaron una serie de valores anómalos en los momentos previos a la subida de precios; el efecto era un aumento espectacular de las ventas en el momento en que previsiblemente los demandantes anticipaban la subida de precios.

La variable $\dot{P}_N$ nos sirvió pues para modelizar parte de dichas anomalías. Se trata entonces de lograr algún tipo de especificación de la misma. Como datos, se contaba exclusivamente con las informaciones registradas por el monopolio de Tabacos sobre las subidas efectivas de precios.

Pero además necesitamos establecer un supuesto que haga factible la utilización de dicha serie para la variable $\dot{P}_N$: identificar la expectativa de subida con su cuantía efectiva. Es decir, suponemos que los datos de $\dot{P}_N$ se corresponden exactamente con los cambios de precios que han tenido lugar con posterioridad.

En términos de las series de ochenta y cuatro observaciones a las que vienen referidas las demás variables de la ecuación, para la variable $\dot{P}_N$ tendríamos una serie cuyos elementos son todos nulos a excepción de los correspondientes a las fechas en que se han registrado dichas expectativas alcistas.

4.3.3. Estimación de la Función de la Demanda

Una vez hecha la especificación y caracterización de la función de demanda, sólo resta la estimación de la misma.

Para dicha estimación se ha utilizado una regresión mínimo cuadrática, en base a la serie de datos anteriormente mencionados.

La ecuación estimada responde a la forma siguiente:

$$D_N = -5{,}53\ P_N + 0{,}77\ t + 12{,}7\ \dot{P}_N + 254{,}68$$

De la observación de la ecuación se desprende que, a lo largo del período muestral, las ventas de cigarrillos negros han tenido un comportamiento ligeramente expansivo, con un crecimiento mensual inferior a las 800.000 cajetillas, y que la subida de precios ejerce un impacto sobre la demanda con signo teóricamente correcto.

La ecuación así obtenida explica el 67% de la varianza de las ventas de cigarrillos negros, con un error medio de 10 millones de cajetillas mensuales, lo que representa aproximadamente un 4,5% del nivel de ventas de 1978.

El test basado en el análisis de los errores standard de los coeficientes,

Coeficiente	Error del coeficiente
-5,5	1,68
0,77	0,16
12,73	2,86
254,68	14,93

indica que efectivamente los coeficientes de regresión son significativos desde el punto de vista estadístico (1).

Una forma alternativa de comprobar la significación estadística de todos los coeficientes consiste en recurrir al estadístico F como test global de la regresión (2).

---

(1) Ya que todos ellos son superiores a dos veces el error standard correspondiente.

(2) Johnston (1975)

La comparación del F (3,80) = 24,02 de nuestra muestra con el F de las tablas al nivel de confianza del 5%, que es F = 2,68, nos conduce a concluir que la regresión es significativa.

4.4. APLICACION DEL PRINCIPIO DE MAXIMO

4.4.1. Hipótesis

Como todo trabajo empírico, nuestro modelo del monopolio de Tabacos parte de una serie de hipótesis claves a la hora de someterlo a un tratamiento matemático, en nuestro caso a la aplicación del Principio de Máximo como técnica de optimización dinámica.

Aunque parte de estos supuestos se han venido señalando a lo largo de la descripción teórica y de la fase de estimación del modelo, no estará de más una explicitación clara del conjunto de hipótesis sobre el que descansa la aplicación realizada. Como es obvio, tales hipótesis limitan el grado de veracidad del modelo. El conjunto de hipótesis se puede expresar en los siguientes términos:

i) Se excluye en la modelización del sistema cualquier consideración sobre los costes. Este hecho condiciona, por un lado, la elección del objetivo (maximizar ingresos y no beneficios) y, por otro, deja fuera del análisis otros posibles costes de ajuste.

ii) La variable a controlar por el monopolista se supone que es la variación esperada del precio. Con esta variable, y a través de la relación (ecuación de transición) $\dot{P}_N = U$, donde U es la variable de control y $\dot{P}_N$ la variación esperada del precio, el monopolista controla, a la vez que determina automáticamente, el precio óptimo del tabaco negro (variable de estado).

iii) Una tercera hipótesis se refiere a las restricciones sobre la variable definida en términos de la Teoría del Control Optimo como variable de control (U). Para fijar estas restricciones hemos partido de un estudio minucioso de la serie real $\dot{P}_N$. Como se ha comentado en páginas anteriores, esta variable, identificada como variación esperada del precio, toma en la realidad valores no nulos en unos instantes concretos del tiempo del período en estudio (enero 72-diciembre 78). Sin embargo, por la naturaleza intrínsecamente dinámica de la Teoría que nos ocupa y de los problemas que contempla, vamos a suponer que la variable $\dot{P}_N$ toma algún valor no nulo en todos los momentos del intervalo considerado. Para determinar la magnitud de dichos valores vamos a partir de las informaciones disponibles anteriormente reseñadas sobre $\dot{P}_N$ y de una serie de supuestos que se explicitarán a continuación.

En lo que respecta a los datos disponibles, se puede mencionar, recordando lo expuesto anteriormente, que éstos se referían a unas expectativas de subida del precio medio del tabaco negro, producidos en unos determinados momentos; su efecto casi inmediato consistía en adquisiciones anormales de tabaco por parte de los demandantes. Las expectativas registradas preveían una subida de alrededor de tres pesetas; en dos de ellas, esta subida anunciada se veía correspondida por una subida real posterior; en un caso, a los 12 meses de haberse producido el rumor, y en otro, a los 6 meses.

Por tanto, la expectativa creada por el rumor y las consecuencias de esta expectativa se dejarían sentir en un plazo que, como máximo, abarcaría el período considerado entre aquél en en que se produce la expectativa y el que corresponde a la subida efectiva; es decir, en el primer caso doce meses, y en el segundo seis.

Naturalmente, en la realidad los efectos de una expectativa de precios de este tipo se producen casi de inmediato respecto a la propagación de la misma, y con el tiempo es de esperar que tales efectos tiendan a extinguirse casi por completo.

Sin embargo, y en base a lo anterior, vamos a fijar una hipótesis que acomoda las informaciones disponibles a las características dinámicas del tipo de modelos que aquí estudiamos: Podríamos suponer que, en lugar de darse esa expectativa de subida del precio en un momento, se descompusiera la misma en una serie contínua de expectativas, de forma que la suma de efectos continuados durante el período equivaliera al que en la realidad se produce en un momento concreto. Para tomar un ejemplo de nuestros datos, supondríamos que la expectativa de subida (rumor) del precio de 3 Pts., equivale a unas expectativas de subida mensual de 0,25 Pts en cada uno de los doce subperíodos que transcurren hasta que la subida realmente se produce.

Partiendo de los datos disponibles, vamos a suponer pues que la variable de control se mueve en el intervalo:

$$0 \leqslant U \leqslant 0,25$$

iv) De cara a la aplicación del Principio de Máximo a nuestro modelo, supondremos que la única información disponible sobre el estado en el Problema 1 es el precio en el momento inicial y el tiempo final. En un segundo Problema, además de estos datos, dispondremos de una restricción terminal sobre el precio.

En el Problema 1 dejar el precio en el tiempo final libre, si bien puede ser una hipótesis de aplicación discutible en la realidad, ya que significa una despreocupación total por parte del monopolio sobre el precio alcanzable en el instante terminal, no es tan alarmante si nos fijamos, por un lado, en que el agente económico en estudio es un monopolio y que, como tal, tiene garantizada la exclusividad de su producto; y, por otro, en que nuestro objetivo no es entrar en consideraciones políticas o sociológicas que impidieran al monopolio actuar libremente.

La segunda etapa de nuestro trabajo numérico será la resolución del problema tal como es enunciado anteriormente, pero con una restricción terminal sobre el precio óptimo.

4.4.2. Elementos del Problema

El problema económico expuesto en la sección previa puede resumirse de la siguiente forma: determinar la trayectoria óptima de precios que, pasando por el punto $P_N(1) = 9,750$, lleve a un estado $P_N(84)$ no especificado, o bien a un estado final restringido, satisfaciendo las condiciones de transición mientras se maximizan los ingresos del monopolio de Tabacos español. Este problema es susceptible de ser resuelto como un problema de control óptimo.

En este sentido parece oportuno empezar la resolución del mismo definiendo cada una de las variables y funciones relevantes a partir de sus equivalentes en el modelo económico. Estos elementos son:

1) Como primer elemento a destacar está el tiempo (t). El problema de optimización a resolver será formulado en tiempo contínuo. El intervalo temporal está fijado y abarca desde t = 1 hasta t = 84. Esto es, nuestro análisis será para $t \in [1, 84]$.

2) La variable de estado es el precio del tabaco negro (P_N) en cada instante. Esta variable estará restringida, aunque de forma implícita, a la

restricción de positividad (ya que un precio cero o negativo carece de sentido económico). Además, la variable de estado, en nuestro caso el precio, ha de satisfacer la condición de contorno inicial:

$$P_N(1) = 9,75$$

con $t_1 = 84$ especificado, en un primer problema; y las condiciones

$$P_N(1) = 9,75$$

$$P_N(84) \leq 26$$

en el problema 2.

3) La ecuación de transición del sistema vendrá expresada por:

$$\dot{P}_N = U$$

donde U será la variable de control que permitirá al monopolista controlar el precio a través de la ecuación mencionada. Esto es, a través de la variación esperada del precio ($\dot{P}_N$).

4) El conjunto de controles admisibles en nuestro modelo lo constituyen todas las funciones U(t) contínuas a trozos definidas sobre el intervalo [1 , 84] que satisfacen

$$0 \leq U \leq 0{,}25$$

5) Por lo que se refiere a las condiciones extremas (aunque ya se han citado en 2)), conviene centrarnos en cada uno de los problemas a resolver.

Para el 1, las condiciones de contorno son:

$$P_N(1) = 9{,}75$$

$$t_1 = 84$$

$$P_N(84) \text{ no especificado}$$

Esta no especificación del precio en el tiempo final hace que las condiciones de contorno no sean suficientes y que sea preciso acudir a la condición de transversalidad para obtener una condición adicional, que para este problema se reduce a:

$$\lambda(84) = 0$$

Respecto al problema 2, la existencia de restricciones terminales sobre el precio, del tipo

$$P_N(84) \leqslant 26$$

obliga desde la perspectiva de la transversalidad a que

$$\lambda(84) \leqslant 0$$

$$\text{siendo} \quad \lambda(84).[P_N(84)-26] = 0$$

6) Por último, el funcional objetivo. Según hemos estudiado en la descripción del modelo económico, la demanda de mercado varía a lo largo del período según la evolución seguida por el precio del bien. Por tanto, el Ingreso del monopolio de tabacos por unidad de tiempo, cuando se produce un output V_N por unidad de tiempo y se vende al precio P_N, vendrá dado por:

$$I = V_N \cdot P_N$$

Esta es la tasa de ingreso en un tiempo t, que depende del precio y de la variación esperada en ese tiempo. Por tanto, los ingresos totales para el período considerado se obtendrán sumando los ingresos de unidades sucesivas de tiempo. Dado que la variación del precio y del output se supone contínua, la suma puede representarse por una integral, esto es:

$$I = \int_{1}^{84} V_N . P_N(t) \ dt$$

En términos del Principio de Máximo, el funcional objetivo vendrá expresado como

$$I = \int_{1}^{84} \text{Ingresos} \ . \ dt$$

Si nuestro objetivo se centra en determinar los precios óptimos que maximizan los ingresos, el funcional se expresará:

$$\text{maximizar} \left[I = \int_{1}^{84} \text{Ingresos} \ . \ dt \right]$$

Sustituyendo los Ingresos por su valor, esto es, por el producto de las ventas por el precio, a partir de la función de demanda estimada, el funcional objetivo responderá en nuestro caso a:

$$\text{maximizar} \left[I = \int_{1}^{84} (-5{,}53 \ P_N^2 + 0{,}77.t.P_N + 12{,}73.\dot{P}_N.P_N + 254{,}68.P_N) \ dt \right]$$

4.4.3. Determinación de la solución para el Problema 1

Resumiendo brevemente el objetivo que nos ocupa: determinar los precios óptimos que maximizan los ingresos del monopolio, vamos a plantearnos la solución del mismo, partiendo para ello de las condiciones que definen lo que hemos denominado el Problema 1.

Para determinar la trayectoria de precios óptimos partimos de los siguientes elementos:

i) $$\max.\left[I = \int_{1}^{84} (-5,53.P_N^2 + 0,77.P_N + 12,73.P_N.\dot{P}_N + 254,68.P_N)\, dt \right]$$

ii) sujeto a las condiciones

$$\dot{P}_N = U \qquad \text{siendo } P_N(1) = 9,75$$

iii) con la restricción de control

$$0 \leqslant U \leqslant 0,25$$

La Teoría del Principio de Máximo nos dice que la condición necesaria para que un control óptimo $U^*(t)$, admisible, determine una trayectoria de estado óptima $P_N^*(t)$, que satisface las condiciones de contor no es que exista una función auxiliar $\lambda(t)$ contínua (1) y tal que se verifique que

$$\dot{\lambda} = - H_{P_N}$$

donde la función Hamiltoniana H se define como:

$$H = - 5{,}53.P_N^2 + 0{,}77.t.P_N + 12{,}73.U.P_N +$$
$$+ 254{,}68.P_N + \lambda.U$$

siendo la condición de transversalidad

$$\lambda(84) = 0$$

y que además satisface que en cada instante $t \in [1 , 84]$ la función de control óptimo $U^*(t)$ maximiza la función Hamiltoniana $H[\lambda(t), P_N^*(t), U]$, es decir,

$$\underset{\{U \in [0,\, 0{,}25]\}}{\text{maximizar}} \quad H[\lambda^*(t), P_N^*(t), U, t] =$$
$$= H[\lambda^*(t), P_N^*(t), U^*(t), t]$$

---

(1) Tal como en el Capítulo II, suponemos la constante λ_o=1 y, por tanto, la condición de $[\lambda_o, \lambda(t)] \neq 0$ $\forall$ t, se satisface. Véase Pontryagin (1962).

En términos de nuestro modelo numérico, la variable auxiliar $\lambda(t)$ expresará en cada instante la variación de los ingresos totales, evaluados en sus valores óptimos inducida por una variación unitaria del precio a lo largo de la trayectoria óptima (1).

La primera condición necesaria para que un control admisible U maximice el funcional objetivo

$$I = \int_{1}^{84} (-5{,}53.P_N^2 + 0{,}77.t.P_N + 12{,}73.\dot{P}_N.P_N + 254{,}68.P_N)\, dt$$

mientras se satisface la ecuación

$$\dot{P}_N = U(t)$$

con

$$P_N(1) = 9{,}75$$

es que exista una función de coestado $\lambda(t)$ contínua en el intervalo sujeta a la restricción $\lambda(84) = 0$ que sea la solución de la ecuación diferencial adjunta

$$\dot{\lambda} = -H_{P_N}$$

---

(1) Véase en este sentido Peterson (1973)

y tal que dicha variable haga máxima en cada t la función Hamiltoniana $H[\lambda(t), P_N(t), U(t)]$ cuando $\lambda(t)$ es la función de coestado solución a la ecuación diferencial adjunta obtenida y $P_N(t)$ es la función de estado

Al ser $H(t, P_N, U, \lambda)$ una función lineal en la variable de control, nos encontramos ante lo que en el Capítulo 3 se define como un problema de control óptimo bang-bang. La particularidad de los problemas con la función Hamiltoniana lineal en la variable de control es que la variable de control sólo puede tomar los valores extremos de su región de admisibilidad. El que tome un valor u otro, o tenga una discontinuidad en un momento determinado, dependerá enteramente del objetivo señalado (maximizar o minimizar) y del signo del coeficiente de esta variable en la función Hamiltoniana.

Así, si nuestro objetivo es maximizar los ingresos totales, H será maximizada en cada instante si la función de control toma el valor máximo cuando su coeficiente es positivo, y el valor mínimo cuando el coeficiente es negativo. En este sentido, utilizando la notación estudiada en el Capítulo 3, sección 3.4, tendremos:

$U = 0{,}25$ cuando $(12{,}73P_N+\lambda) > 0$

$U = 0$ " $(12{,}73P_N+\lambda) < 0$

De donde se deriva que para que el control $U(t)$ sea óptimo, sujeto a la restricción $0 \leqslant U \leqslant 0{,}25$, es necesario que optimice el valor de la función Hamiltoniana para cada t, cuando H está evaluada en los óptimos de las funciones $P_N(t)$ y $\lambda(t)$ deducidos a partir de las ecuaciones de transición y adjunta con las condiciones extremas

$$P_N(1) = 9{,}75$$

$$(84) = 0$$

$$t_1 = 84$$

Volviendo a la expresión para el control óptimo, se observa que la función de control tomará el valor máximo cuando $(12{,}73 . P_N + \lambda)$, coeficiente de la variable de control en la función Hamiltoniana, sea positivo, y tomará el valor mínimo $U(t) = 0$ en el intervalo en que $(12{,}73 + \lambda)$ sea negativo. Por tanto, esta función de control óptimo, que es una función contínua a trozos (cuyos intervalos de continuidad se corresponden con variaciones esperadas constantes del precio) satisface los requisitos de continuidad, que, según estudiamos en el Capítulo I, se exigen a dicho tipo de funciones en la Teoría del Control Optimo.

El instante en que el control óptimo salta de un valor a otro, que corresponde a un punto de discontinuidad en la función de control, recibe el nombre de punto de "conmutación".

Volvamos al estudio de las condiciones necesarias de optimalidad. Según hemos señalado en páginas anteriores, la función Hamiltoniana para este problema responde a la forma

$$H = -5{,}53.P_N^2 + 0{,}77.t.P_N + 12{,}73.\dot{P}_N.P_N +$$
$$+ 254{,}68.P_N + \lambda.U$$

La condición necesaria, que nos permite determinar la trayectoria óptima de las variables auxiliares, expresa que

$$\dot{\lambda} = H_{P_N}$$

Sustituyendo el valor de H_{P_N} en nuestro problema, tendremos:

$$\dot{\lambda} = 11{,}06.P_N - 0{,}77.t - 12{,}73.U - 254{,}68$$

Si la Teoría nos explica que los problemas de control lineal son fácilmente resolubles cuando la ecuación adjunta es una ecuación diferencial en $\lambda(t)$ que puede resolverse por los métodos clásicos. El trabajo empírico y en este caso concreto la función anterior nos muestran que la ecuación $\dot{\lambda}$ puede presentar formas muy variadas y de no tan fácil solución. La resolución de esta ecuación requiere en consecuencia el auxilio de la intuición y del sentido económico del problema en general. Así, habremos de partir de algún supuesto que nos permita resolver la ecuación $\dot{}$ con la única información que nos suministra la condición de contorno derivada de la transversalidad

$$\lambda(84) = 0$$

En este sentido, si nuestro objetivo es maximizar los ingresos del monopolista, y para conseguir dicho objetivo nuestro interés se centra en la optimización de la función Hamiltoniana en cada instante, es obvio que lo deseable será que la variable de control tome su valor máximo cuando su coeficiente en la función Hamiltoniana sea positivo, y el valor mínimo cuando dicho coeficiente sea negativo.

A partir de este supuesto podemos determinar una solución de la ecuación adjunta. Esto es, si suponemos que el coeficiente es positivo, entonces el control óptimo será:

$$U^{*} = 0,25$$

Este valor óptimo sustituído en la ecuación de transición del modelo $(\dot{P} = U)$ nos da que la variación esperada del precio óptima es:

$$\dot{P}_N = 0,25$$

El valor obtenido para $\dot{P}_N$ más las condiciones de contorno que vienen dadas por:

$$P_N(1) = 9,75$$

$$t_1 = 84$$

$$\lambda(84) = 0$$

nos permitirán determinar la trayectoria de precios óptima; esto es,

$$P_N^{*}(t) = P_N(t_o) + \int_{t_o}^{t} \dot{P}_N .\ dT$$

Particularizando para nuestro problema, esta ecuación se transforma en:

$$P_N^*(t) = 9,75 + \int_1^t 0,25.d\tau = 9,75 + 0,25.\tau \Big|_1^t =$$

$$= 9,75 - 0,25 + 0,25.t = 9,50 + 0,25.t$$

La ecuación obtenida,

$$P_N^*(t) = 9,50 + 0,25\ t$$

nos indica que la trayectoria del precio óptimo del tabaco negro para el período de los 7 años es una función lineal del tiempo cuando el coeficiente de la variable de control en la función Hamiltoniana es positivo y, por tanto, el control óptimo es constante e igual a 0,25.

Llevando las funciones óptimas de precio y de control a la ecuación dinámica de la variable auxiliar, tendremos que:

$$- \dot{\lambda} = -11,06(9,5 + 0,25\ t) + 0,77\ t + 12,73.0,25 +$$

$$+ 254,68$$

Operando,

$$- \dot{\lambda} = -1{,}99\ t + 152{,}79$$

Esta última expresión es ya una ecuación en t que puede ser resuelta teniendo en cuenta la condición terminal

$$\lambda(84) = 0$$

En este sentido, la función auxiliar óptima vendrá dada por:

$$\lambda(t) = \lambda(84) + \int_t^{84} - \dot{\lambda}\ dT =$$

$$= 0 + \int_t^{84} (-1{,}99\ T + 152{,}79)\ dT =$$

$$= -\ 0{,}99\ T^2 + 152{,}79\ T \Big|_t^{84} =$$

$$= -0{,}99.84^2 + 152{,}79.84 + 0{,}99.t^2 - 152{,}79.t =$$

$$= 5848{,}92 + 0{,}99.t^2 - 152{,}79.t$$

Esto es,

$$\lambda^*(t) = 0{,}99.t^2 - 152{,}79.t + 5848{,}92$$

Dando valores a esta función para cada t se observa que las $\lambda(t)$ son positivas aunque con valores cada vez más pequeños, confirmándose de esta forma nuestro supuesto adicional; esto es, si nuestro objetivo era determinar la trayectoria óptima de precios que maximizará los ingresos totales del monopolio de Tabacos, el supuesto hecho sobre el comportamiento de la variable de control según el signo de su coeficiente en la función Hamiltoniana se ha confirmado.

Aunque la interpretación económica de los resultados se hará de forma detallada en una sección de Conclusiones, parece oportuno hacer una breve descripción del problema formulado y de los resultados obtenidos. En este sentido, si el monopolio de Tabacos se propone un programa de optimización de Ingresos con las únicas restricciones del precio en el tiempo inicial y de la duración del programa, la aplicación del Principio de Máximo de Pontryagin a la consecución de este objetivo nos dice que la función óptima de precios que debería aplicarse para maximizar los Ingresos sería una función lineal y creciente

$$P_N^*(t) = 9,50 + 0,25\ t$$

que corresponde a una variación del precio constante e igual a 0,25.

En términos numéricos, y aunque como se ha dicho se reserva el análisis en detalle para el apartado 4.5, parece conveniente reflejar aquí algunas cifras significativas: utilizando el control que se proponía en el ejercicio se llegaría en la observación final a un precio medio de la clase de tabaco en estudio de 30,5 Pts/cajetilla. Es decir, si tenemos en cuenta que el precio original de nuestra serie era 9,75 Pts/cajetilla, el resultado de nuestro problema es que tendría que realizarse una política óptima de precios que implica un crecimiento anual (tasa acumulativa) del 17,45% para alcanzar dicho precio final.

4.4.4. Determinación de la solución del Problema 2

Supongamos tal como se ha señalado en páginas anteriores una variante del Problema anterior. Esta variante se encuentra imponiendo al precio en el instante final una restricción de la forma:

$$P_N(84) \leqslant \overline{P_N}$$

donde $\overline{P_N}$ sería un valor determinado que se considera no debe ser sobrepasado por el precio del tabaco negro en el instante final.

Necesitamos por tanto plantear alguna hipótesis sobre este valor límite $\overline{P_N}$. Para ello vamos a basarnos en los datos obtenidos en el Problema 1. En el mismo se extraía como resultado de la aplicación de la política óptima una tasa de crecimiento medio anual del precio de 17,45%. Sin embargo, la observación de la serie real nos refleja unas fluctuaciones anuales de precios, en términos medios, bastante reducidas. Vamos a suponer en este sentido que se fijara un límite al crecimiento de dichos precios y que, como hipótesis de trabajo, situamos en un 15% el crecimiento medio acumulativo anual para el período considerado.

Es decir, partiendo del precio en el instante inicial, 9,75, y suponiendo la tasa de crecimiento mencionada, al cabo de los siete años equivaldría a decir que el precio no podría ser mayor de:

$$P_N(84) = 9,75\ (1 + 0,15)^7 = 25,96$$

Redondeando decimales, nuestra hipótesis equivale a decir que

$$\overline{P_N} = 26$$

Y, por tanto, el límite fijado, en términos de la teoría del control, sería:

$$P_N(84) \leqslant 26$$

Una vez determinada esta constante, la restricción terminal sobre el precio óptimo final puede expresarse según la formulación expuesta en el Capítulo 2, sección 2.2, como

$$C(t, Y) = P_N(84) - 26 \leqslant 0$$

Desde los desarrollos teóricos elaborados en el Capítulo II sabemos que, o bien $P_N(84) < 26$, lo que equivale a una solución interior, o bien $P_N(84)=26$ que expresa una solución en la frontera del recinto de admisibilidad. En el primer caso, $P_N(84) < 26$, las condiciones necesarias de optimalidad son idénticas a las de un problema sin restricciones terminales. Y en el segundo, la condición de transversalidad exigirá condiciones adicionales al signo de la variable auxiliar correspondiente.

La variable de coestado asociada a las restricciones de desigualdad sobre el estado era $\delta(t)$. Así, utilizando esta terminología la restricción podrá expresarse como:

$$\delta(84)\left[P_N(84) - 26\right] = 0$$

siendo $\delta(84) < 0$ cuando $P_N(84) < 0$.

Ahora bien, como ya comentamos en el capítulo correspondiente a restricciones de estado, si la restricción de desigualdad sobre la variable de estado está centrada en los puntos extremos (inicial o terminal) de la misma, entonces $\lambda(t)$ juega el papel de la variable $\delta(t)$. De este modo, la condición anterior podrá expresarse:

$$\lambda(84)\left[P_N(84) - 26\right] = 0 \;, \quad \text{con } \lambda(84) \leq 0$$

Esta condición nos está indicando, tal como hemos señalado, que ó bien el precio óptimo en t = 84 es igual a 26, con lo cual $\lambda(84)$ ha de ser menor que cero; o bien $P_N(84) < 26$, lo que conduce a $\lambda(84)$ igual a cero, como corresponde a un problema sin restricción terminal activa.

En este Problema la función Hamiltoniana es la correspondiente al Problema 1, esto es, una función lineal en la variable de control. Por tanto será también problema de control óptimo bang-bang con la función de control definida por

$$0 \leq U \leq 0{,}25$$

El haber resuelto en una primera etapa del trabajo empírico un problema con el precio final libre (no especificado) significa disponer de una ayuda importante a la hora de intentar elaborar otros tipos de restricciones que nos puedan llevar a determinar otras políticas óptimas. Esto es, si el supuesto de precio final no especificado nos condujo a un precio óptimo final de 30,5 Pts, es obvio que cualquier restricción que obligue al precio final a ser inferior a su óptimo libremente seleccionado significará un cambio en la trayectoria óptima de precios y, por tanto, una variación en los Ingresos totales del monopolio.

Tal como se estudió en la sección 2.2 de este trabajo, la importancia de las condiciones terminales, llamadas condiciones de transversalidad, sobre las variables auxiliares radica en que suponen una fuente de información importante, por un lado, para resolver la ecuación adjunta y, por otro, en que tal como se interpretan estas variables desde el punto de vista económico su valor nos determina el sentido de la variación del funcional óptimo ante un cambio en la constante de la restricción del estado. En términos de nuestro modelo, $-\lambda(84)$ nos expresa con su signo el sentido de la variación de los ingresos totales óptimos si la constante de la restricción, en este caso el precio final varía en una unidad.

A la hora de plantear la expresión que corresponde a la función de control óptimo se nos presentan dos alternativas:

- Bien que la función de control óptimo tenga una discontinuidad en un tiempo t^* que sea inferior al instante final,

- o bien que la discontinuidad se dé en el instante final, esto es, en $t^* = 84$.

Supongamos, según la primera de estas posibilidades, que la función de control pasa desde su valor máximo (0,25) a su valor mínimo (0) en un momento $t^* < 84$. A la vista de esta primera alternativa, tendremos que el control óptimo será de la forma

$$U^*(t) = \begin{cases} 0,25 & 0 \leqslant t \leqslant t^* \\ 0 & t^* < t \leqslant 84 \end{cases}$$

Según está implícito en el Problema 1, un salto en la función de control se da en un instante t^* cuando

$$\lambda(t^*) = -\ 12,73\ P_N(t^*)$$

esto es, cuando el control pasa de 0,25 a 0.

Dado que la restricción de estado nos está indicando un cambio en la trayectoria de estado, es factible suponer un salto en la función de control que nos conduzca a la consecución de tal objetivo.

Ahora bien, el estado puede satisfacer la restricción como una igualdad, es decir, alcanzar el límite de la restricción en un tiempo t que puede, desde el punto de vista matemático, ser igual o inferior al tiempo final t = 84. Lo deseable desde el punto de vista económicos es que esta restricción lleve a una función de precios óptima, tal como la obtenida en el Problema 1 hasta justamente el instante t en que el precio alcance el valor límite y luego permanezca constante hasta el tiempo final. El calificar de deseable a esta situación tiene como fundamento, como más tarde veremos, el valor del límite inferior de la función de control (1).

Consiguientemente, la trayectoria óptima de precios que se obtendría por ese razonamiento sería una función lineal con coeficiente positivo en t hasta un determinado instante que corresponde al límite de la restricción, y a partir de ese momento la función óptima de precios sería una constante.

---

(1) Si la región de control hubiese venido definida por

$$0{,}1 \leqslant U \leqslant 0{,}25$$

la calificación "a priori" de deseable no tendría tanto sentido.

Volvamos ahora pues al problema numérico, y en este sentido al estudio de las condiciones necesarias de optimalidad.

La primera condición necesaria para que un control admisible U maximice el funcional objetivo

$$I = \int_{1}^{84} \left[-5,53\ P_N^2 + 0,77\ t\ P_N + 12,73\ \dot{P}_N\ P_N + \right.$$

$$\left. + \ 254,68\ P_N\right]\ dt$$

mientras se satisface la ecuación

$$\dot{P}_N = U(t)$$

con

$$P_N(1) = 9,75$$

$$P_N(84) \leqslant 26$$

es que exista una función de coestado $\lambda(t)$ contínua en el intervalo que sea solución de la ecuación diferencial adjunta

$$\dot{\lambda} = -H_{P_N}$$

y tal que dicha variable haga máxima en cada t la función Hamiltoniana correspondiente $H[\lambda(t), P_N(t), U(t), t]$ cuando $\lambda(t)$ es la función auxiliar solución a la ecuación diferencial adjunta y $P_N(t)$ es la función de estado obtenida desde la ecuación dinámica correspondiente con la restricción

$$P_N(t_1) \leq 26$$

La función Hamiltoniana en nuestro problema responde a la forma:

$$H = -5,5\ P_N^2 + 0,8\ t\ P_N + 12,7\ P_N\ U + \lambda.U + 254,7\ P_N$$

Por tanto, la ecuación adjunta se transforma en

$$\dot{\lambda} = 11\ P_N - 0,8\ t - 12,7\ U - 254,7$$

de donde se obtiene que para que el control U sea óptimo, sujeto a la restricción $0 \leq U \leq 0,25$, es necesario que optimice el valor de H para cada t cuando H está evaluada en los óptimos de $P_N(t)$ y $\lambda(t)$ deducidos a partir de las ecuaciones de transición y adjunta con las condiciones extremas

$$P_N(1) = 9,750 \qquad \lambda(84)\left[P_N(84-26)\right] = 0$$

Al ser la función Hamiltoniana una función lineal en la función de control, estamos ante un problema de control bang-bang. Esto es, ante una función de control contínua a trozos.

Utilizando los mismos razonamientos que en el Problema 1, los valores óptimos de $P_N(t)$ y de U nos permitirán expresar $\dot{\lambda}$ como una función del tiempo. En este sentido, si el control óptimo para el intervalo $1 \leq t \leq t^*$ es

$$U^* = 0,25$$

entonces, desde la ecuación de transición se obtiene que la variación esperada del precio es

$$\dot{P}_N = 0,25$$

Consiguientemente, la trayectoria óptima de precios en $1 \leq t \leq t^*$ responderá a la forma

$$P_N^*(t) = 9,75 + \int_0^t 0,25 \; d\tau =$$

$$= 9,50 + 0,25 \; t$$

Sustituyendo estos valores óptimos de $P_N(t)$ y de $U(t)$ en la ecuación adjunta, podremos ya expresar la ecuación de las variables auxiliares como

$$\lambda(t) = \lambda(t^*) + \int_t^{t^*} (-1,99 \; \tau + 152,79) \; d\tau =$$

$$= -12,73 \; P_N(t^*) - 0,99 \; t^{*2} + 152,79 \; t^* +$$

$$+ 0,99 \; t^2 - 152,79 \; t$$

A partir del supuesto hecho sobre el valor de t^*, esto es, $t^* < 84$, tendremos que en ese instante la función óptima de precios tendrá una esquina antes de la observación final que corresponde por tanto a un instante anterior al tiempo final, por lo que $\lambda(84)$ deberá ser negativa, y desde la condición de transversalidad se seguirá que

$$P_N(84) - 26 = 0$$

Por tanto, la trayectoria óptima de precios para el intervalo $t^* \leq t \leq 84$ podrá ser determinada a partir de: por un lado, la expresión para el control óptimo en el intervalo pertinente ($U^* = 0$, $\forall t$ / $t^* < t \leq 84$) y, por otro lado, desde la ecuación de transición ($U = \dot{P}_N$). Así pues, tendremos que:

$$P_N^*(t) = P_N(t^*) + \int_{t^*}^{84} \dot{P}_N \, d\tau =$$

$$= P_N(t^*) \qquad \text{para } t^* < t \leq 84$$

ya que $\dot{P}_N = 0$ en ese intervalo.

El valor del precio en el momento t^* será igual al valor de la función óptima de precios en el intervalo $1 \leq t \leq t^*$ tomado en t^*.

Esto es,

$$P_N(t^*) = 9,50 + 0,25\ t^*$$

Además, si desde la restricción terminal sobre el precio se ha de satisfacer que

$$\lambda(84) < 0$$

ya que $P_N(84) - 26 = 0$, entonces,

$$9,50 + 0,25\ t^* = 26$$

$$t^* = 66$$

Dado que este valor de t^* está a la izquierda del instante final, el supuesto utilizado se acepta como válido, y la segunda alternativa con $t^* = 84$ se rechaza.

Los resultados obtenidos en este segundo problema nos llevan a concluir que si el monopolio de Tabacos considera conveniente (por las razones al principio comentadas) poner tope al precio máximo alcanzable en el tiempo final, entonces su trayectoria óptima de precios tendrá una sección que es una función creciente hasta el instante t = 66, y desde este momento será constante e igual a 26.

La peculiaridad de este segundo problema está en que la restricción impuesta se satisface no sólo en $t = 84$, sino desde $t = 66$ hasta $t = 84$. Esto es, nos encontramos ante un segmento límite de la trayectoria óptima de precios, donde el punto de discontinuidad de la derivada tiene lugar en $t = t^*$. En este punto se habrá de satisfacer que $\lambda(t)$ sea contínua.

La ecuación de las variables auxiliares correspondiente a esta sección de la trayectoria óptima será

$$\lambda(t) = \lambda(84) + \int_t^{84} (0{,}77\ T - 34{,}77)\ dT$$

siendo el integrando del segundo sumando la función H_{P_N} evaluada en los óptimos de P_N y $\dot{P}$, y $\lambda(84)$ un valor desconocido que debe ser negativo para satisfacer la condición de transversalidad

$$\lambda(84)\left[P_N(84) - 26\right] = 0$$

Si $\lambda(t)$ debe ser contínua en la esquina, entonces se habrá de cumplir que el límite de la primera sección cuando $t \to 66^-$ y el límite de la segunda para $t \to 66^+$ tienen que ser iguales al $\lambda(t)$ de la segunda en el tiempo $t = 66$.

Por tanto, si la ecuación dinámica de las variables auxiliares en el intervalo $t^* < t \leq 84$ nos da la solución

$$\lambda(t) = K + 2681{,}28 - 2920{,}68 - 0{,}38\, t^2 + 34{,}77\, t =$$

$$= K + 34{,}77\, t - 0{,}38\, t^2 - 239{,}4$$

entonces, para $t = 66$ el valor de la constante K podrá ser determinado igualando $-\ 12{,}73.P_N$ en $t = 66$ a esta ecuación,

$$-\ 330{,}20 = K + 400{,}14$$

$$K = -\ 730{,}34$$

donde el valor de K es el correspondiente a la variable auxiliar (λ) en el instante final ($t = 84$). Este valor también podría haber sido calculado planteando la ecuación

$$\lambda(t) = \lambda(t^*) + \int_{t^*}^{t} \dot{\lambda}\ dT$$

donde el valor de la condición inicial $\lambda(t^*)$ es calculado en la ecuación auxiliar del intervalo $1 < t \leq t^*$ una vez determinado $t^* = 66$. El valor de $\lambda(84)$ calculado mediante esta ecuación resultó ser idéntico, tal como se esperaba, al determinado anteriormente.

El valor de la variable auxiliar $\lambda(t)$ en t = 84 tiene una importancia singular en este tipo de problemas. La razón está en la interpretación económica de estas variables como tasas marginales de cambio del funcional óptimo ante una variación unitaria de la constante de la restricción sobre el precio. Es decir, $\lambda(84) = -730{,}34$ nos expresa el valor medio (1) de la variación en los ingresos totales óptimos del monopolio de tabacos ante una variación unitaria del precio final. Un análisis más detallado sobre las implicaciones de esta condición terminal en nuestro problema se hará en la sección de "Conclusiones".

---

(1) Por valor medio queremos expresar la media de las variaciones del funcional óptimo que siguen a un incremento del precio final desde $P_N(84)=26$ a $P_N(84)=27$ y a una disminución de forma que $P_N(84)=26$ pase a ser $P_N(84)=25$.

4.5. RESULTADOS PRELIMINARES

Los problemas formulados y resueltos en páginas anteriores pertenecen a una determinada familia de problemas de control óptimo. Son problemas de control lineal de los que se conocen normalmente en la literatura como control "bang-bang". Como se sabe, la implicación esencial del control óptimo bang-bang es que la función U^{*} está siempre en uno de sus valores extremos, dependiendo enteramente del signo de su coeficiente en la función Hamiltoniana. Consiguientemente, la función de control óptimo correspondiente es una función contínua con un número finito de discontinuidades, es decir, contínua a trozos.

En este tipo de problemas, al ser H una función lineal en la variable de control, las condiciones necesarias de optimalidad se presentan como un sistema de tres ecuaciones, donde una de las ecuaciones es una función escalonada. En este sentido, en un problema de control bang-bang (1), nos enfrentamos con que la condición de Principio de Máximo, parcial

---

(1) Además, un problema de control lineal para conjuntos no acotados de U carece de sentido.

de H respecto a la variable de control, no sólo no nos da una función de control óptimo en términos de $\lambda(t)$ y de $P_N(t)$, sino que además, para determinar la expresión de control óptimo habremos de acudir en la mayoría de los casos a supuestos racionales sobre la conducta de su coeficiente en la función Hamiltoniana.

El caso más sencillo dentro de esta familia de problemas lo constituyen aquéllos, ya expuestos en la sección 3.4 de este trabajo, en que la ecuación adjunta es una función de la propia variable $\lambda(t)$ (1). En éstos, la no especificación del estado en el tiempo final permite desde la condición de transversalidad determinar una única solución $\lambda(t)$ que satisfaga las condiciones necesarias de optimalidad. Esta solución será el elemento decisivo en la función de control óptimo y, por tanto, en la trayectoria óptima del estado.

---

(1) El tratamiento de estos problemas se encuentra ya en la obra de Pontryagin (1962). En esta obra, Pontryagin y sus colaboradores estudian el control lineal tanto para una región de control que es un poliedro cerrado y convexo como para el caso en que $\overline{U}_p$ es un paralelepípedo.

El planteamiento teórico esbozado más arriba se ve sin embargo modificado en las aplicaciones reales; en nuestro caso la presencia de una ecuación adjunta que tiene entre sus argumentos elementos distintos de $\lambda(t)$. Esto es,

$$\dot{\lambda} = f(P_N, U, t)$$

Por lo que respecta a las condiciones suficientes, cabe señalar que si, tal como se estudia en el Capítulo I de este trabajo, solamente en el caso en que pudiera probarse la existencia de una solución óptima al problema y el sistema de condiciones necesarias derivadas del Principio de Máximo proporcionara una solución $U^*(t)$ que permitiera determinar la trayectoria de estado correspondiente, podríamos garantizar sin necesidad de acudir a la aplicación de condiciones suficientes que esta solución $U^*(t)$ era la óptima.

Nuestro modelo seleccionado de monopolio corresponde a una situación relativamente singular, que corresponde a un problema de control lineal en la variable de control; ésto implica como se sabe que las condiciones necesarias de optimalidad son suficientes, en virtud del Teorema generalizado de Weierstrass de la Programación Lineal (1).

Por último, vamos a analizar brevemente las condiciones terminales de nuestro modelo.

La única diferencia entre el problema con precio final fijado y con precio final libre está en las condiciones de contorno. Según se estudió en el Capítulo I, en un problema de estado final especificado las condiciones de contorno:

$$Y(t_o) = Y_o$$

$$Y(t_1) = Y_1$$

son suficientes para determinar la trayectoria óptima deseada en el conjunto de soluciones del sistema de condiciones necesarias. Tal como señalábamos, éste no era el tipo de problemas más comunes en las aplicaciones, sino que lo usual en los modelos susceptibles de ser tratados por las técnicas de Control Optimo era

---

(1) Una demostración exhaustiva del Teorema de existencia y unicidad de la solución óptima en un problema de control lineal puede encontrarse en Pontryagin (1962).

poseer información parcial sobre alguno de los elementos que componen las condiciones de contorno. En este sentido, nuestro Problema 1 cae dentro de esta familia y, como tal, requiere de la información que con el nombre de condiciones adicionales nos proporciona la condición de transversalidad. Si para el Problema 1 las condiciones de contorno son:

$$P_N(1) = 9,75$$

$$t_1 = 84$$

entonces la condición adicional que hará suficientes las condiciones de contorno será:

$$\lambda(84) = 0$$

La interpretación económica de este resultado es totalmente coherente con los supuestos del modelo. Esto es, si el precio se ha calculado sin ningún tipo de restricciones sobre el precio final, entonces una variación unitaria del precio final no significará ningún cambio en el nivel de ingresos totales óptimos obtenidos con el precio óptimo calculado libremente.

Algunos tratadistas del control óptimo, a la hora de analizar un problema con extremo final libre, han llegado a plantear objeciones al mismo de índole si se quiere ética, sobre la base de que se correspon de con una despreocupación total por parte del planificador de la "herencia" a transmitir a generaciones futuras.

Esta crítica, evidentemente, debe ser matizada convenientemente en nuestro caso, dado que ni la perspectiva temporal del mismo ni los elementos que definen la estructura del monopolio elegido y las soluciones obtenidas dan pié para suponer un perjuicio de relevancia de cara al futuro. A ésto habría que añadir el carácter intrínseco del modelo que intenta convertirse en un marco para posibles alternativas de actuación.

Por lo que se refiere al Problema 2, la existencia de la restricción terminal sobre el precio hace que consigamos resultados que pueden considerarse en cierta medida desde el punto de vista económico más aceptables que los del Problema 1.

Este tipo de condiciones sobre la trayectoria óptima de precios,impuestas una vez conocida la evolu ción de ingresos y ventas del Problema 1, conducen a resultados más coherentes en el sentido de considerar al monopolio como una empresa más dentro de la estruc tura socioeconómica de un pais. Es decir, este tipo de restricciones le sirven al monopolio para tener en cuenta lo que antes hemos denominado las generaciones futuras, los costes de ajuste, la importancia de su producto en los indicadores de actividad nacional, etc.

La implantación de este tipo de restricciones en un problema de control óptimo lleva a que se satisfaga una de las dos condiciones siguientes:

a) Si el estado final, en nuestro modelo el precio, satisface en el tiempo terminal la restricción como una igualdad, entonces el signo de la variable auxiliar correspondiente habrá de ser negativo. El signo de esta variable juega un papel decisivo en las aplicaciones económicas del Principio de Máximo.

b) Si el estado final no satisface la restricción como igualdad, sino que toma un valor inferior al límite, entonces la variable auxiliar correspondiente al tiempo terminal habrá de ser cero.

Como más tarde discutiremos, nuestro problema sigue la condición a) y, por tanto, el comentario sobre el sentido económico de la misma se hará más detalladamente en páginas siguientes.

4.5.1. Comentario al Problema 1

La aplicación del Principio de Máximo a nuestro problema con los supuestos específicamente tratados nos obliga a una evaluación económica de los resultados. Esta evaluación será hecha para cada una de las funciones relevantes por separado, resaltando simultáneamente su repercusión o influencia en el objetivo global del modelo.

La primera función a comentar será la del control óptimo. Este en el Problema 1 es una función constante a lo largo de todo el intervalo, esto es, $U^* = 0,25$. Este resultado, conocido en la moderna Teoría del Control óptimo como "control constante" (1), nos indica en el problema económico concreto considerado de maximización de ingresos que la política óptima de precios a llevar a cabo por el monopolio de Tabacos debe ser la que corresponde a una función de precios creciente y lineal con t. Para la consecución de tal objetivo la variación del precio, variable de control en nuestro modelo, hubiera tenido que ser constante e igual a:

$$\dot{P}_N = 0,25$$

---

(1) Miller (1979)."Problemas lineales", pág.134 y stes.

La trayectoria óptima de precios, como consecuencia de una variación esperada de precios constante, es una función lineal y creciente con el tiempo, de la forma

$$P_N(t) = 9,5 + 0,25\ t$$

La conducta temporal de los precios, puesta de manifiesto por la ecuación anterior, se traduce en unos ingresos óptimos, superiores a los reales.

La conclusión inmediata de estos resultados es que la política óptima de precios que se fundamenta en una subida gradual de los mismos hubiera permitido alcanzar, bajo los supuestos de este problema, al monopolio unos ingresos situados por encima de los realmente obtenidos.

Debe también señalarse que la obtención de unos precios óptimos superiores a los reales lleva a la consecución del objetivo: maximizar los ingresos, a costa de una disminución en las ventas.

Una vez hecha una revisión general sobre los resultados obtenidos, cabe señalar cómo éstos ponen de manifiesto la validez en la aplicabilidad de esta Teoría. Las hipótesis utilizadas, si bien en términos generales pueden parecer restrictivas, tienen sin embargo una matización positiva: se está hablando de un monopolio en el que la capacidad de control es mayor que en otro tipo de empresa. Esto nos lleva a (volviendo a lo anterior) que estas técnicas son más aplicables en unos casos que en otros.

4.5.2. Comentario al Problema 2

La existencia en este problema de una restricción terminal sobre el precio del tabaco negro, $P_N(84) \leqslant 26$, hace alcanzar resultados distintos a los del Problema 1.

Aunque cae fuera de nuestro ámbito la consideración de los costes sobre el objetivo marcado por el Monopolio, está más de acuerdo con el comportamiento real del mismo el establecer un tope al precio final (o lo que puede considerarse un volumen de ventas mínimo), de forma que no se distorsione en gran medida, bien la estructura productiva, bien la ordenación del mercado en el sentido de gustos de los consumidores (con el previsible desplazamiento en las ventas).

Vamos a considerar, en base a esa existencia de restricciones a la que nos hemos referido (1), los dos posibles casos que pueden presentarse con la restricción

$$P_N(84) \leqslant 26$$

---

(1) Esto es, el precio puede alcanzar cualquier valor positivo consecuente con la trayectoria de precios anterior al instante t=84.

i) Si $P_N(84) < 26$, entonces el precio en el instante final del intervalo no alcanza el límite de la restricción (o, lo que es lo mismo, la restricción es inactiva en ese punto) y, por consiguiente, desde la condición de transversalidad aplicable a restricciones sobre el estado final se sigue que $\lambda(84)$ sea cero; esto es,

$$\lambda(84) = 0$$

ii) En cambio, si $P_N(84) = 26$, esto es, el precio en el mes de diciembre del 78 toma el valor de 26 Pts, entonces desde las condiciones terminales sobre las variables adjuntas, o condiciones de transversalidad, se sigue que:

$$\lambda(84) < 0$$

Resumiendo en una sola ecuación las dos alternativas, tendremos:

$$\lambda(84)\left[P_N(84) - 26\right] = 0$$

siendo $\lambda(84) \leqslant 0$ si $P_N(84) \leqslant 26$.

Esta condición nos viene a explicar en nuestro caso que si efectivamente, tal como se observa en el planteamiento matemático, el precio final es igual a 26, entonces la condición de signo sobre el valor marginal del precio nos ha de expresar que un incremento de una unidad en la constante de restricción $(27 - 26 = 1 = \Delta)$ lleva a unos ingresos totales mayores.

A este mismo resultado se llega utilizando el procedimiento más explicativo de Peterson (1). Peterson nos dice que si la constante de la restricción sobre el estado final del sistema se incrementa, entonces, dado que la derivada del funcional óptimo respecto a la perturbación es igual a la variable auxiliar en ese instante con signo menos, entonces, si $\lambda(t_1)$ es menor que cero ésto implica que el funcional óptimo una vez producida la alteración en la constante es mayor que la correspondiente antes de la perturbación.

En términos concretos, si el precio final, en lugar de 26, fuera 27, los Ingresos totales del monopolio se elevarían en la cuantía de $-\lambda(84)$ millones aproximadamente. Este resultado tiene una interpreta-

---

(1) Véase Cap.3, sección 3.2. Interpretación económica de las variables auxiliares terminales.

ción económica coherente en nuestro modelo. Esto es, basta con observar los ingresos totales óptimos que se derivan de la restricción

$$P_N(84) \leqslant 26$$

y comprobarlos con los que se obtendrían permaneciendo constantes el resto de las condiciones pero $P_N(84) \leqslant 27$. Esto, lógicamente, según los ingresos y precios óptimos derivados para un problema sin restricciones terminales, conducirá a un incremento en los Ingresos totales óptimos en una cuantía similar a $-\lambda(t_1)$.

Los resultados obtenidos desde el ámbito de la aplicación del Principio de Máximo a este segundo problema nos muestran una función de control óptimo contínua a trozos con un salto de discontinuidad en el instante t = 66. Esta función que satisface por tanto los requisitos sobre continuidad exigidos por la Teoría del Control Optimo conduce, vía la ecuación de transición, a que la variación esperada del precio sea constante e igual a 0,25 para el intervalo (1, 66) y luego desaparezca en el período restante.

La conducta temporal de la variación esperada del precio implica una política óptima de precios según las funciones:

$$P_N(t) = 9,5 + 0,25\ t \qquad \forall t/ \quad 1 \leqslant t \leqslant 66$$

$$P_N(t) = P_N(66) = 26 \qquad \forall t/ \quad 66 < t \leqslant 84$$

Como se observa, el precio sube gradualmente hasta el instante t = 66 (que corresponde al mes de junio de 1977), en que toma el valor límite. El sentido económico de este resultado es obvio. Una vez que el precio alcanza su valor máximo, entra en una fase de precio constante. Lógicamente cabe preguntarse hasta qué punto un resultado matemáticamente factible (como es el que corresponde a un precio que crece gradualmente hasta t = 83 y luego decrece para satisfacer la restricción) hubiera sido aceptado como solución óptima. La respuesta es inmediata. Si la solución numérica hubiera sido la descrita, el modelo en cuestión, cumpliendo todas las condiciones del Principio de Máximo, hubiera tenido que ser desechado. La razón estaría en que pensar en un descenso como parte de la solución óptima no tiene sentido económico real, ya que las tendencias a la baja de los precios no resultan hoy por hoy muy aceptables.

El resultado encontrado en este problema, basado en un segmento límite y no en un punto, que parecía lo más atractivo en base a las ideas expuestas en nuestro Capítulo 2, obedece fundamentalmente a dos características de nuestro modelo:

i) El Hamiltoniano a maximizar en cada mes es una función lineal en la variable de control y, como consecuencia, esta variable sólo puede tomar los valores extremos de su región de admisibilidad.

ii) La función de control tiene como límite inferior el valor cero. Si este límite no fuera cero, el mismo problema presentaría un comportamiento distinto (1). La razón está en que el precio en

---

(1) La limitación que supone el extremo inferior 0 se pone de manifiesto en la resolución de un problema si se considera dicho límite una cantidad no nula cualquiera. P.ej., sean los extremos de la función de control

$$0,1 \leqslant U \leqslant 0,25$$

En este caso, el punto discontinuidad de la función de control se daría en un tiempo t=54 aproximadamente cuando el precio óptimo es 23. La trayectoria de precios desde este instante hasta el final sería también una función creciente y lineal en t, pero con una variable de control distinta de cero.

el intervalo final no sería constante, sino que seguiría una trayectoria creciente aunque más lenta.

La política óptima de precios obtenida para este problema conduce también a unos ingresos óptimos superiores a los reales, aunque inferiores a los obtenidos con la política de precios del Problema 1. Simultáneamente las ventas decrecen, pero menos que en el Problema 1.

4.6. EVALUACION GENERAL

Especificadas en páginas anteriores las características básicas de los ejercicios planteados y los resultados y conclusiones más importantes que se desprenden de los mismos desde el ámbito de la Tesis del Control Optimo, vamos a intentar en este apartado llevar a cabo una evaluación general de los elementos mencionados, así como a plasmar algunos de los principales resultados obtenidos en términos de cifras concretas.

El aspecto básico y previo que nos gustaría señalar es que la conclusión principal de los ejercicios planteados debe buscarse más en el sentido general de los mismos que en la mayor o menor precisión en los cálculos realizados. Queremos con este punto incidir de nuevo sobre el objetivo principal de nuestra tesis, que puede resumirse muy esquemáticamente en un intento de corroboración de la aplicabilidad del tipo de técnicas examinadas al mundo económico.

Naturalmente, el desarrollo experimentado por la Teoría de Control Optimo en años recientes ha supuesto el que esta aplicabilidad quedara manifestada desde diferentes y relevantes puntos de vista. Concretamente, y con las matizaciones debidas, se puede hablar de la existencia de un considerable número de trabajos cuyo enfoque es similar al aquí abordado, y en general puede decirse que el mayor número de aplicaciones de la teoría se ha realizado sobre el análisis de diferentes aspectos de la empresa como unidad económica. Como ejemplo puede verse Bensoussan (1974), que constituye una completa recopilación de este tipo de aplicaciones.

No es menos cierto sin embargo que las aplicaciones dentro de la economía española han sido relativamente escasas y que por tanto un objetivo complementario de la labor realizada es el de servir en mayor o menor grado como iniciadores de un área de investigación.

Aún más; el campo concreto elegido, que es el de una empresa con características que cabe considerar como monopolísticas en lo que se refiere al producto que fabrica, y además de carácter público, presenta un interés adicional, dada la significación especial que en la economía española tienen determinados mercados definidos por rasgos similares a los mencionados (en términos de la teoría económica, situaciones de competencia imperfecta).

Como toda modelización de elementos reales, nuestro trabajo parte de un cierto número de hipótesis que por un lado vienen apoyadas en elementos teóricos referentes al tema en cuestión, y por otro vienen condicionados por la información disponible.

Resulta por tanto obvio que la mayor disponibilidad de datos e informaciones supone una ayuda fundamental para acercar el modelo a la realidad que representa. En nuestro caso concreto no se contaba con información sobre la estructura de funcionamiento interno de la empresa (productiva, financiera, etc.) y ésto condujo precisamente a la formulación de un determinado objetivo con unas restricciones específicas dentro de una cierta gama de posibilidades.

Pero a este respecto interesa resaltar aquí que la relativa simplicidad de nuestro modelo, condicionado en primera instancia por las disponibilidades de información, no supone una limitación a la hora de enjuiciar la aplicabilidad de la teoría del control óptimo; precisamente es una de sus características principales el hecho de que permite incorporar un número elevado de restricciones, y adaptarse a las mismas en la búsqueda de resultados concretos.

En lo que respecta al análisis de las cifras concretas obtenidas, puede señalarse como principal característica que el mantenimiento de unos precios reales muy por debajo de los que pueden considerarse óptimos llevaron a unos rendimientos reales del monopolio muy inferiores a los que se hubieran obtenido con la puesta en práctica de una cualquiera de las dos políticas óptimas. Así, la cifra de precio medio correspondiente al instante final según las trayectorias óptimas resultó ser 30,5 y 26,0 Pts/cajetilla para los problemas 1 y 2, respectivamente, mientras que la cifra correspondiente a dicho instante según la serie real era de 17,4 Pts/cajetilla.

Pero más importante que hacer comparaciones sobre cifras finales de precios es realzar que las aplicaciones planteadas, dado el carácter dinámico de las mismas, suponen una evolución gradual de los precios que posee indudables ventajas para la empresa de cara a la consecución de objetivos determinados, a medio y largo plazo.

Refirámonos a continuación a los ingresos, ya que el objetivo señalado para el monopolio era la maximización de los mismos.

El funcional objetivo, cuya misión es evaluar la efectividad de un control óptimo, permite en nuestro caso, y mediante la resolución de la integral correspondiente, obtener unas cifras aproximativas de ingresos totales en los problemas 1 y 2 notablemente superiores a los ingresos reales.

Naturalmente, tales cifras no deben ser, como ya se ha señalado, examinadas como datos precisos, sino más bien como indicadores de tendencias, que es lo que perseguían nuestros ejemplos.

Una implicación esencial del tipo de situaciones que plantea nuestro problema es la que se refiere a los costes de ajuste que supondría para la empresa el adaptarse a las trayectorias óptimas de precios. Aun cuando nuestro modelo no puede, por falta de información al respecto, contemplar dicho aspecto, es importante señalar la aplicabilidad de las técnicas analizadas a esquemas en los que sí se consideraron, a partir de una información más completa, los costes de ajustes.

La importancia de estos esquemas dentro de la economía española es relevante, en especial desde la perspectiva de la futura integración en la Comunidad Económica Europea; en efecto, empresas y sectores de distintos campos de actividad se encuentran, al igual que el caso que nos ocupa (Monopolio de Tabacos), sometidos a restricciones y limitaciones en sus políticas de precios. La integración, con unas exigencias de creación de un marco económico general más competitivo, supondrá la necesidad de reestructuraciones para dichas empresas, sobre todo derivadas del hecho de que desaparecerán en gran medida las restricciones de precios que el Sector Público actualmente impone.

A pesar de ser algo obvio, conviene señalar que estos ejercicios han partido de un planteamiento "ex-post"; es decir, que una vez observada la realidad en un período concreto, se han determinado las modificaciones que habría que introducir en ciertos elementos para alterar la conducta real hasta aproximarla a la que se ha fijado como óptima, según los criterios expuestos.

En la realidad, un modelo de control óptimo alcanza verdadero significado en la planificación de cara al futuro trazando las líneas de evolución por las que ha de transcurrir el sistema; sin embargo, nuestro modelo se encuentra a un nivel previo, aunque necesario, de dicha planificación: la observación de las conductas real y óptima en el pasado, como base para las prospecciones futuras.

En definitiva, resumiendo los anteriores puntos, puede extraerse como conclusión básica de los ejercicios realizados que la actuación de la empresa en lo que se refiere a la variable "précios" ha distado de encontrarse en el nivel óptimo durante el período 1972-78. Y que, en consecuencia, a pesar de que el mantenimiento de los precios por debajo del óptimo ha permitido expansionar la actividad, al producirse una tendencia al alza de las cantidades vendidas, la empresa ha dejado de percibir una sustancial cifra de ingresos durante dicho período.

Planteado en términos de la teoría de control, si la empresa hubiera podido fijar, al principio del período, los controles adecuados para guiar la trayectoria de evolución de precios en las sendas obtenidas en nuestros ejercicios, sus ingresos se habrían aproximado a lo que puede considerarse en términos generales un óptimo (en este caso, un máximo).

En resumen, se intentaba aquí resaltar la aplicabilidad de esta técnica; no circunscribiendo su validez al ejemplo; éste sólo tiene por objeto ilustrar dos posibilidades de aplicación de una técnica susceptible de una utilización mucho más general para afrontar una serie de problemas de orden práctico.

CAPITULO 5

RESUMEN Y CONCLUSIONES

RESUMEN Y CONCLUSIONES

A continuación intentaremos resumir, en una serie de puntos, los principales aspectos analizados en nuestra Tesis y las conclusiones más relevantes que pueden obtenerse de la misma. El orden de exposición se corresponde con el de los distintos apartados y capítulos de nuestro trabajo.

Un aspecto previo sobre el que nos gustaría volver a incidir aquí es el del alcance del mismo. Nuestro trabajo no pretende ser un estudio en profundidad de la Teoría del Control Optimo. Su intención es, al mismo tiempo que se ofrece una panorámica general de dicha teoría, mostrar el grado de aplicabilidad al mundo económico de la misma, a través de un ejercicio realizado sobre datos reales de una actividad concreta de la economía española. Naturalmente, el desarrollo de esta teoría en los últimos años ha supuesto que se llevaran a cabo numerosos trabajos de investigación en el campo concreto de la Teoría económica, que demuestran sobradamente la aplicabilidad de dicha teoría.

Dado que las conclusiones fundamentales se han venido señalando en los apartados correspondientes, el propósito de este Capítulo es exclusivamente el de resumirlas e interconexionarlas de forma que permitan evaluar el grado en que se han alcanzado los objetivos previamente fijados para este trabajo.

En el Capítulo I nuestro propósito era plantear y resolver, utilizando el Principio de Máximo de Pontryagin, un problema de control elemental determinístico en tiempo contínuo que nos sirviera de guía en los capítulos siguientes, y en especial en la elaboración de un problema de optimización dinámica.

En términos generales, el planteamiento de dicho tipo de problemas podría ser el siguiente: en un modelo concreto se fija un objetivo determinado a cumplir en un período de tiempo especificado, que se traduce en términos de la Teoría del Control Optimo en optimizar el funcional objetivo. Se plantea entonces el problema de seleccionar qué decisión de entre el conjunto admisible debe tomar la persona encargada de la toma de decisiones para llegar a la consecución óptima del objetivo.

La solución de este problema en términos de la Teoría del Control parte de un sistema de ecuaciones diferenciales, ó sistema dinámico, que representa el modelo. Asímismo, se precisa de la información so bre el estado del sistema en el momento inicial y final del período. Esta información podrá venir especificada a priori o bien a través del conjunto de condiciones de transversalidad. Además, según el objetivo señalado, se dispondrá de la forma del funcional correspondiente.

El problema con estos elementos se plantea como uno de optimización dinámica donde la cuestión será seleccionar aquí la decisión o control óptimo que maximice el funcional objetivo para las restricciones impuestas por el sistema dinámico y las condiciones de contorno. El control considerado óptimo tiene la propiedad de determinar automáticamente la función de estado a través del sistema dinámico.

Las condiciones que deben satisfacerse por la solución óptima al problema de control formulado se concretan en un conjunto de 2n ecuaciones diferenciales más las m que corresponden a la condición de Principio de Máximo. La característica realmente nueva de este método matemático de optimización de Pontryagin es la forma de determinar las variables de control. Estas se determinan de forma que maximicen la función Hamiltoniana correspondiente en cada instante del intervalo.

El estudio de cada una de las soluciones para comprobar si efectivamente son o no las óptimas requiere en la mayoría de los casos la aplicación de las denominadas condiciones suficientes. Estas se obtienen al margen del Principio de Máximo (que como se sabe da solamente condiciones necesarias), y han sido desarrolladas, entre otros, por Mangasarian (1966).

Solamente en los problemas en los que puede probarse a priori la existencia de una solución óptima y además el sistema de condiciones necesarias proporciona una sola función de control y un correspondiente estado podemos asegurar, sin necesidad de aplicar las condiciones suficientes, que esta función es la solución óptima.

Ahora bien, esta situación se da sólo en casos excepcionales, como son los problemas de control lineal o bien problemas solamente lineales en la variable de control, y, por tanto, la aplicación de las condiciones suficientes basadas en la concavidad de las funciones relevantes se hace, en la mayor parte de los casos, imprescindible.

Aunque en un principio suponemos condiciones extremas fijas, sin embargo, al igual que en la Teoría clásica, es posible tener condiciones extremas variables; esto es, situaciones en las que el tiempo inicial o final y/o el estado en ese instante son incógnitas del problema. En estos casos, las condiciones de transversalidad juntamente con las del Principio de Máximo forman un conjunto de condiciones necesarias de optimalidad.

El objetivo implícito al comienzo de este trabajo (la realización de un problema de optimización dinámica enmarcado en la realidad económica) nos exigía el estudio de la técnica seleccionada, el Principio de Máximo de Pontryagin, desde el punto de vista de condicionamientos específicos sobre las variables. La razón es obvia, la mayoría de los problemas de optimización, tanto en economía como en otras ciencias, se caracterizan porque las funciones o variables que los definen deben satisfacer determinadas restricciones que se derivan de las diferentes propiedades de las teorías correspondientes según el problema en cuestión.

El conjunto de condiciones que, por ejemplo, la Teoría económica exige a las funciones específicas de un modelo se traducen en el planteamiento matemático del mismo en un conjunto de restricciones que, según la técnica de optimización y el objetivo seleccionado, se podrán clasificar en restricciones sobre las funciones de control o restricciones sobre el estado del sistema.

Una gran parte de estas restricciones se presentan como condiciones de desigualdad; por tanto, parecía conveniente plantear un problema de control a nivel teórico, utilizando los elementos del Principio de Máximo, con restricciones bastante generales que permitiera resolver como casos particulares una amplia gama de modelos numéricos. A este objetivo se dedica el Capítulo 2. Los resultados de este estudio, utilizando técnicas y elementos de la teoría clásica (principalmente a partir del concepto de variable de holgura de Valentine) se recogen en un conjunto de condiciones necesarias de optimalidad que presentarán términos diferentes según se den restricciones sobre las variables de control o sobre las variables de estado, o sobre ambas.

Consideremos en primer lugar un problema de control en el que sólo existen restricciones sobre las variables de decisión, restricciones que en su forma más general se expresan como:

$$R(t,\ Y,\ U) \leqslant 0$$

La resolución del mismo lleva a formular un conjunto de condiciones necesarias, entre las cuales se encuentra la de Principio de Máximo de Pontryagin que se obtiene desde la condición clásica de Weierstrass, y que se expresa como

$$H(t,Y^{*},U^{*},\Lambda^{*}) = \underset{\{U \in \bar{U}_p\}}{\text{maximizar}}\ H(t,Y^{*},\Lambda^{*},U)$$

donde $\bar{U}_p$ es el conjunto de funciones de control admisibles. En estos problemas, la región de control ($\bar{U}_p$) depende a la vez del tiempo y de los valores de las variables de estado. Al utilizar este tipo de restricciones tan generales, la condición necesaria que recoge la evolución temporal de las variables auxiliares presentará también un término adicional que indica que $\bar{U}_p$ varía con los valores de la variable de estado.

En cualquier caso, parece conveniente resaltar aquí que Pontryagin utiliza una región de control que es un subconjunto abierto o cerrado del espacio euclidiano correspondiente, pero no un $\overline{U}_p$ dependiente del estado del sistema, que es el supuesto utilizado en nuestro caso, siguiendo los planteamientos de Hestenes (1966), Balakrishnam (1972) y Hadley-Kemp (1971) entre otros.

Además, para este tipo de problemas donde la función de control óptimo puede tomar valores de la frontera de $\overline{U}_p$, la forma utilizada en el modelo sin restricciones para expresar la condición de Principio de Máximo como

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0$$

no es válida, ya que esta forma, tal como se explicó, sólo tiene sentido en la determinación de soluciones interiores.

Vamos a pasar ahora a analizar brevemente las características más sobresalientes de los problemas de control en aquellos casos en los que las variables de estado del sistema no pueden tomar cualquier valor arbitrario del espacio euclidiano R^n.

Lo más común en las aplicaciones de la Teoría del Control Optimo es que las variables de estado pertenezcan a una región de admisibilidad definida por restricciones de la forma

$$C(t, Y) \leqslant 0$$

La observación de este tipo de restricciones sobre el estado pone de manifiesto la posibilidad de una trayectoria de estado óptima que contenga segmentos completamente interiores a su dominio ($\overline{Y}_p$) y segmentos que transcurran por la frontera del mismo. Este hecho induce al estudio de las condiciones necesarias para cada uno de los dos tipos de segmentos, así como al análisis de las llamadas condiciones adicionales que deben satisfacerse en los puntos de la frontera de $\overline{Y}_p$ que sean unión de dos segmentos interiores o bien de uno interior y uno frontera.

En consecuencia pueden señalarse los siguientes puntos:

i) Para aquellos segmentos de la trayectoria óptima a lo largo de los cuales $C(t,Y) < 0$ la restricción en sí misma puede ignorarse, y las condiciones necesarias son las correspondientes al problema sin restricciones.

ii) Cuando la trayectoria óptima esté, durante algún intervalo, sobre la frontera de su región, entonces la transformación de la restricción en otra que visualice la conexión entre la variable de estado y la de control, permite obtener el conjunto de condiciones necesarias de optimalidad para estos segmentos de la trayectoria óptima. Entre estas condiciones necesarias, la de Principio de Máximo se enuncia de la siguiente forma: la variable de control se elige de forma que maximice la función Hamiltoniana en cada instante sujeto a la restricción $C(t,Y) \leqslant 0$.

iii) Por tanto, tendremos un conjunto de condiciones necesarias que deben satisfacerse a lo largo de un segmento interior (sin incluir el punto final); un conjunto que corresponde a un segmento límite (también sin considerar los puntos extremos) y un conjunto de condiciones conjugadas que deben satisfacerse en cada esquina o punto de unión de cada dos segmentos de la trayectoria óptima.

La parte siguiente en nuestro trabajo (Capítulo 3) constituye un intento de relación entre la formulación matemática de la Teoría del Control Optimo y su posible aplicación a problemas específicos de la realidad.

El primer tema dentro de estos objetivos es la interpretación económica de los diferentes elementos de la teoría del control óptimo. La conclusión más importante de este estudio a partir principalmente de los trabajos de Dorfman (1969) y Peterson (1973) se basa en la interpretación de las variables de coestado como funciones que miden la sensibilidad del funcional óptimo ante pequeñas variaciones del estado; o, en términos más estrictamente económicos, como precios sombra de una unidad de estado.

La política óptima a seguir por la persona o entidad encargada de un programa de optimización consiste en seleccionar la decisión o control dentro del conjunto admisible que haga máxima en cada instante su función Hamiltoniana. Es decir, basta con que se maximice en cada momento la tasa de actividad expresada por la función Hamiltoniana, sobre la base del estado y del precio sombra existentes, para que la trayectoria de estado correspondiente sea la óptima.

Esta condición, que es la expresión teórica del Principio de Máximo, es coherente con las características esenciales del mismo, que transforma un problema de optimización dinámica en uno de optimización estática.

En cuanto al resto de condiciones necesarias, podemos señalar que la correspondiente al sistema dinámico, en sí misma, expresa cómo evoluciona el estado del sistema en cada instante como resultado del estado presente y de las decisiones tomadas.

Y en lo que respecta a la ecuación diferencial de las variables auxiliares se puede señalar que si bien Dorfman (1969) la dota de un contenido económico preciso (al presentarla como la condición que hace que el capital se deprecie a la misma tasa que contribuye a la obtención del output), en modelos distintos al de este autor la interpretación económica vendrá estrechamente relacionada con el modelo en cuestión, es decir, con lo que para este modelo son las variables de estado, de control y el objetivo en sí mismo.

El siguiente apartado se dedica al estudio de los problemas de control lineal. Este análisis parecía conveniente dado que tales problemas constituyen una muestra significativa del tipo de aplicaciones generales de la Teoría del Control Optimo; y en particular en lo que se refiere a las posibilidades de aplicación a la economía.

Este tipo de planteamientos, de los que son representativos autores como Takayama (1967), Intriligator (1964), Dantzig (1966) y Pontryagin (1962), que han sido los utilizados fundamentalmente en nuestro trabajo, tiene algunas características que los hacen particularmente interesantes desde el punto de vista de las aplicaciones empíricas. Entre estas características podemos destacar las siguientes:

- La existencia de una solución óptima está garantizada. Esto es, la estructura lineal de la función Hamiltoniana con una región de control definida por un poliedro cerrado y convexo o por un paralelepípedo, garantiza a partir de desarrollos de la Programación Lineal, la existencia de un control óptimo.

- La función de control óptimo es contínua a trozos. Es decir, la función de control sólo puede tomar los valores extremos de su región de admisibilidad. Esta característica de la función de control óptimo es la que justifica el nombre que se le da en la literatura: función de bang-bang.
- Un caso especial dentro de este grupo de problemas lo constituyen los que tienen un funcional objetivo cuadrático. La importancia de los problemas lineales y cuadráticos radica en que permiten obtener funciones de control feedback. Esto, consiguientemente, lleva a que al ser el control óptimo una función del estado del sistema en cada instante, cualquier perturbación que haga al sistema alejarse de su sendero óptimo será advertida por el estado y transmitida al control correspondiente.

Por último, parece conveniente volver sobre el enfoque de comparaciones entre el Principio de Máximo y las técnicas del Cálculo de Variaciones y la Programación Dinámica, puntos de constante referencia para el primero.

El problema elemental que permite derivar el Principio de Máximo responde a un esquema similar al formulado mediante el Cálculo de Variaciones; ambos parten de la determinación de una función óptima que puede estar sometida a determinadas restricciones además de las condiciones de contorno. En este sentido, cuando la región de control es el espacio euclidiano o es un subconjunto abierto de éste, entonces las condiciones necesarias de Pontryagin se pueden obtener a partir de las correspondientes del Cálculo de Variaciones clásico, y éstas últimas pueden a su vez obtenerse a partir de aquél.

Pero en realidad el Principio de Máximo de Pontryagin supone una generalización de las condiciones necesarias de Euler-Lagrange para la determinación de extremos de un funcional, al permitir solucionar problemas donde los valores de la frontera de la región de admisibilidad son soluciones posibles.

Este hecho es el que constituye la verdadera ventaja de la teoría desarrollada por Pontryagin y sus colaboradores respecto al Cálculo de Variaciones. En estos casos, y tal como se señala por los autores de la nueva corriente teórica, la ecuación de Euler es inoperante para determinar una solución.

El último apartado del Capítulo 3 está dedicado al estudio de la relación existente entre la Programación Dinámica y el Principio de Máximo. La conclusión más importante que se desprende de este análisis es la de que a partir de la ecuación de Bellman y utilizando el supuesto de la diferenciabilidad de la función de optimalidad se obtienen las condiciones necesarias de Pontryagin. El resultado obtenido siguiendo básicamente a autores como Dosoer (1961), Bellman y Kalaba (1965) viene a plasmar la equivalencia en determinados problemas entre estas dos técnicas y, por tanto, a confirmar la conveniencia de haberle dedicado cierta atención.

Pasemos ahora a comentar el Capítulo 4, que constituye la parte fundamental del trabajo. Este carácter de fundamental viene dado por dos tipos de razones: Por un lado, porque el objetivo último de esta Tesis es resaltar las posibilidades de aplicación de la Teoría del Control Optimo a problemas concretos de la realidad; y, por otro, porque en base al objetivo mencionado, la labor de investigación que se contiene en los tres primeros capítulos de este trabajo ha venido enfocada, si se quiere, hacia este tipo de aplicaciones prácticas.

Las aplicaciones planteadas y resueltas en este Capítulo sirven, dentro de las limitaciones que impone el conjunto de hipótesis, para constatar las posibilidades de aplicación de las técnicas de control óptimo a problemas económicos; aplicabilidad que viene dada tanto porque resulta posible encontrar modelos económicos cuyos elementos pueden asimilarse, según el objetivo y el modelo utilizado, a los de la teoría que nos ocupa, como por la mencionada ventaja comparativa en lo que se refiere al aparato matemático de la Teoría del Control Optimo frente al Cálculo de Variaciones en la resolución de los problemas más propiamente económicos.

En este sentido, el ejercicio realizado en la parte empírica de nuestro trabajo constituye un ejemplo de dicha aplicabilidad, así como de la relativa simplicidad con que se puede abordar este tipo de esquemas dinámicos.

Resumiendo sintéticamente las fases fundamentales de que consta este Capítulo y que siguen las pautas tradicionales en este tipo de investigación, podríamos señalar las siguientes:

- Una vez elegido el campo de aplicación se fija el objetivo a alcanzar por el modelo. Para la determinación de este objetivo se parte de planteamientos que nos da la teoría económica sobre el campo concreto sobre el que estamos actuando; en este caso, al centrarnos en una empresa que actúa en régimen que puede considerarse como monopolístico, se toma entre los diferentes objetivos posibles el de maximizar los ingresos.

- Una segunda fase viene implicada por la elección de dicho objetivo, ya que la maximización de ingresos requiere conocer la forma de la función de demanda. Por tanto, se lleva a cabo una estimación de la misma a partir de los datos disponibles y de las hipótesis convencionales de la Teoría de la demanda.

- Una tercera fase es la elección del método de optimización, que en este caso es, obviamente, el Principio de Máximo de Pontryagin.

- La etapa posterior constituye la aplicación en sí misma de la técnica seleccionada, sobre la que vamos a detenernos un poco más.

En primer lugar, y a partir de la función de demanda, se determina la tasa de ingresos instantánea. Como el objetivo es maximizar los ingresos totales del período, la integral definida de la tasa de ingresos constituye el funcional objetivo correspondiente en términos del Principio de Máximo.

De cara a conseguir una visión completa de este tipo de aplicaciones se optó por plantear con la misma base empírica dos ejercicios diferentes que nos llevaran a la determinación de dos políticas óptimas alternativas. El problema uno es, en términos del Principio de Máximo, un problema de control con extremo final libre. En el segundo ejercicio, el precio en el instante final tiene que satisfacer una restricción específica sobre su cuantía.

Obviamente, las condiciones que definen los problemas 1 y 2 no son más que simples ejemplos de la gran variedad de restricciones que sirven para especificar un modelo dinámico de características similares al estudiado.

En este sentido, la solución de cada uno de los ejercicios planteados, utilizando el Principio de Máximo de Pontryagin para problemas lineales, permite a partir de las condiciones de contorno del sistema dinámico y de las condiciones de transversalidad, determinar las funciones óptimas de precios, de variación de los precios y auxiliares.

- La fase última del trabajo es la evaluación de los resultados obtenidos a partir de las hipótesis utilizadas.

Las conclusiones que se obtienen como resultado de la política óptima del Problema 1 son del todo coherentes con los supuestos de partida y con el tipo de mercado seleccionado. Así obtenemos como resultado de un problema de control lineal en la variables de decisión una función de control óptimo del tipo bang-bang. La característica más relevante del modelo en concreto es que el control óptimo es constante a lo largo del período. Este control óptimo determina de forma automática una trayectoria óptima de precios que es una función lineal y creciente con el tiempo.

Desde un punto de vista estrictamente económico el resultado del problema es el siguiente:

- la maximización del funcional objetivo (en los ejercicios resueltos, la maximización de los ingresos totales) del monopolio por la fabricación y venta del tabaco negro, implica unos precios del producto que crecen gradualmente a lo largo del período. Esta trayectoria óptima de precios lleva a unos ingreos totales que son superiores a los que el Monopolio obtiene en la situación real.

La política óptima descrita en el Problema 2 y que constituye una alternativa de solución dinámica respecto al problema 1, conduce a una trayectoria óptima de precios que presenta una esquina en un instante determinado del intervalo. Este hecho, que es consecuencia de una función de control óptimo discontínua, se traduce en un funcional objetivo, en nuestro caso en unos ingresos totales que son superiores a los reales, aunque algo inferiores a los obtenidos con la política de precios del Problema 1.

La conclusión general, una vez expuestos los detalles más relevantes de cada uno de los dos programas de optimización dinámica, es la determinación, para el modelo especificado por las restricciones correspondientes en uno y otro caso, de unas trayectorias óptimas de precios que implican un crecimiento gradual de los mismos. Esto se traduce en unos niveles óptimos de precios. A su vez, ésto lleva a determinar unos ingresos totales que son superiores a los reales, poniéndose de manifiesto cómo la no adopción de una política óptima de precios llevó a la empresa en estudio a una pérdida de ingresos, así como a la creación de una capacidad productiva innecesaria desde el punto de vista del objetivo y de las restricciones especificadas.

En definitiva, en este trabajo nuestro objetivo era demostrar a partir de un estudio exhaustivo de algunos de los principales elementos de lo que se conoce como Teoría del Control Optimo, la viabilidad de esta teoría en sus posibles aplicaciones a la economía dinámica.

Los ejercicios realizados, dentro de sus limitaciones, constituyen una corroboración de dicha aplicabilidad, al mismo tiempo que apuntan líneas concretas de investigación de indudable interés en el contexto actual y futuro de la economía española.

ANEXO A

EL CALCULO DE VARIACIONES:

LOS RESULTADOS MAS UTILIZADOS EN EL ANALISIS DEL PRINCIPIO DE MAXIMO DE PONTRYAGIN

A.1. INTRODUCCION

El objetivo de este Anexo es completar algunos de los puntos principales de nuestro estudio ofreciendo una visión general del cuerpo teórico conocido como Cálculo de Variaciones. Obviamente, escapa al alcance de este trabajo desarrollar un análisis pormenorizado de esta teoría; nos centraremos sobre aquellos puntos básicos de la misma que ofrecen un mayor interés desde el ámbito del Principio de Máximo. No olvidemos, en este sentido, que el Cálculo de Variaciones era el único método de solución de problemas de control hasta la aparición de la Programación Dinámica.

Un elemento fundamental en el desarrollo del Cálculo de Variaciones fue la investigación de numerosos problemas físicos y mecánicos, lo que ha determinado que los métodos y aplicaciones de esta corriente teórica estén fundamentalmente orientados al campo de las ciencias físicas. Entre los problemas orígen de esta teoría destaca el conocido como "problema de la brachistocrona", planteado por Galileo y resuelto por Bernouilli en 1696.

El problema se planteaba en los siguientes términos:

- Sean x_o y x_1 dos puntos fijos; el problema consiste en determinar la trayectoria que supone el tiempo mínimo para una partícula que se desplazara de un punto a otro bajo el efecto de la gravedad. Es decir, entre el conjunto de posibles trayectorias entre x_o y x_1, se trata de hallar la que implica un tiempo mínimo de recorrido.

El objetivo en un problema variacional es determinar una función o curva $y(x)$ que, uniendo los puntos previamente especificados (x_o, x_1), optimice el valor del funcional (1):

$$I(y) = \int_{x_o}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$$

A partir de este planteamiento básico enunciado vamos a desarrollar en este Anexo los siguientes aspectos fundamentales de la teoría del Cálculo de Va

---

(1) Definición de funcional de G.FOMIN: "Un funcional es una clase de función donde la variable independiente es en sí misma una función. Los conceptos de funcional están asociados a Euler. La rama más desarrollada del Cálculo de Funcionales está relacionada con el problema de hallar máximos y mínimos de funcionales, y es llamada 'Cálculo de Variaciones'". -G.Fomin (1963).

riaciones:

En la sección 2 se lleva a cabo el planteamiento formal del problema de extremos fijos partiendo del estudio de las condiciones necesarias que la función denominada óptima ha de satisfacer. El conjunto de condiciones se analiza en dos etapas. En la primera se deduce la ecuación de Euler y las condiciones de esquina de Weierstrass-Erdmann. En la segunda se analizan las condiciones de Legendre, Weierstrass y Jacobi. Como se verá, estas condiciones juegan un papel fundamental a lo largo del Capítulo II de este trabajo.

El punto 3 de esta sección se dedica al estudio de las condiciones suficientes, tanto desde el punto de vista más clásico (basado en el signo de la segunda diferencial), como desde la óptica más moderna (utilizando el criterio de concavidad y convexidad).

En la sección 3 se analiza el problema más general del Cálculo de Variaciones. En este caso el funcional objetivo tiene entre sus argumentos "n" funciones simples y sus correspondientes derivadas primeras. La ecuación de Euler en esta situación se suele expresar en forma vectorial, donde cada elemento del vector es una ecuación de Euler simple.

El resto de condiciones necesarias son fácilmente derivadas para el caso general, y en esta sección sólo se explicita el resultado final.

La información sobre las condiciones extremas o de contorno, que es el elemento fundamental a la hora de determinar las constantes de la ecuación de Euler, se estudia en la sección 4. Esta información puede estar especificada a priori de forma total y tratarse, por tanto, de un problema de extremos fijos, o bien puede venir parcialmente especificada y ser de extremos variables. En este sentido, esta sección se dedica al estudio de las diferentes condiciones adicionales que suplen a las condiciones de contorno en el caso de extremos variables. El análisis que se hace en esta sección constituye un instrumento teórico fundamental en el Principio de Máximo, y en este sentido se utilizan las explicaciones aquí expuestas en la elaboración de los Capítulos I y II.

Por último, en la sección 5 se analizan las diferentes formas de restricción, que se pueden clasificar en dos grupos:

a) las globales o isoperimétricas

b) las parciales

siendo las segundas las más utilizadas en la moderna teoría del control óptimo.

A.2. PROBLEMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO DE VARIACIONES

En todos los problemas planteados que dieron lugar a lo que hoy conocemos como Cálculo de Variaciones, el interés se centra en determinar una función $y(x)$ que pase a través de dos puntos especificados y que optimice (maximice o minimice) el valor de un funcional que normalmente responde a la forma

$$I(y) = \int_{x_o}^{x_1} F(x, y, y')\, dx \qquad (A.1)$$

Por tanto, el problema será determinar qué función o funciones $y(x)$ satisfacen las condiciones extremas:

$$\begin{aligned} y(x_o) &= y_o \\ y(x_1) &= y_1 \end{aligned} \qquad (A.2)$$

mientras maximizan o minimizan (A.1).

Supondremos que las funciones $y(x)$ que vamos a considerar son contínuas con derivadas contínuas a trozos (1). Según este supuesto, alguna función contínua $y(x)$ que satisfaga las condiciones (A.2) (llamadas condiciones extremas o de contorno) será llamada función admisible. Si en (A.2) los puntos $(x_o\ \ y_o)$ y

---

(1) Véase Gelfand y Fomin (1963).

$(x_1 \ y_1)$ son previamente especificados, el problema se llama de puntos fijados. Por lo que se refiere al funcional (A.1), la restricción sobre el integrando F(...) es que tenga primeras y segundas derivadas continuas (esto es, que $F \in C''$).

A la vista de las restricciones hechas sobre las funciones y(x) podemos concluir: 1) que el dominio del funcional I(y) será la colección de todas las funciones y(x) definidas como admisibles; y 2) que F no necesita estar definida en cada punto del intervalo $[x_0 \ x_1]$ (1). Sin embargo, la integral (A.1) siempre estará definida en todo $x \in [x_0 \ x_1]$.

Del mismo modo que en el cálculo ordinario, los métodos del Cálculo de Variaciones tratan de hallar las funciones que optimicen (A.1). En este sentido, se derivarán un conjunto de condiciones necesarias que tendrá algo en común con la condición del cálculo ordinario de primera derivada igual a cero.

---

(1) Ya que F(x, y, y'), al ser función de una función de y'(x), que es contínua a trozos, puede tener discontinuidades. Véase Hadley-Kemp (1971).

La parte no común se presentará cuando la función que optimiza descansa parcialmente sobre el límite del conjunto de puntos (x, y, y'). Esto es, puede suceder que dicha función no satisfaga las condiciones ordinarias y sea preciso ampliarlas para recoger situaciones límite, llegando así a condiciones necesarias comparables a las de Kuhn-Tucker.

No obstante, en algunos casos podemos enfrentarnos a situaciones en que varias funciones satisfagan las condiciones necesarias y por tanto debamos decidir cuál es la que da el verdadero óptimo del funcional. Para resolver estos problemas, de igual forma que en el cálculo ordinario, se puede acudir a las propiedades sobre concavidad o convexidad de las funciones integrantes, o bien a las llamadas condiciones suficientes clásicas.

A.2.1. Condiciones necesarias: La Ecuación de Euler y las Condiciones de Esquina de Weierstrass-Erdmann

a) La Ecuación de Euler.-

Supongamos que existe una función admisible $y(x)$ que es un extremo del funcional (A.1). La primera etapa de nuestro trabajo será determinar el conjunto de condiciones necesarias que esa función admisible, que es un máximo interior de (A.1), debe satisfacer.

Si $y(x)$ es la función que maximiza (A.1), entonces para alguna otra función $z(x)$ admisible se cumple que:

$$I(z) - I(y) \leqslant 0 \tag{A.3}$$

Sean a y b dos valores de x, tales que $y(x)$ no tenga una esquina en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$. Además supongamos que $\psi(x)$ es una función tal que $\psi(x)$ tiene primeras derivadas contínuas y su forma es:

$$\psi(x) \begin{cases} 0 & x \leqslant a \qquad x \geqslant b \\ \text{cualquier valor siempre que } \psi(x) \in C', & a < x < b \end{cases}$$

A la vista de estos supuestos, $\psi(x)$ será una función contínua y diferenciable en cada punto del intervalo $[a, b]$, cumpliéndose que:

$$\begin{aligned} \psi(a) &= \psi(b) = 0 \\ \psi'_+(a) &= \psi'_-(b) = 0 \end{aligned} \qquad \text{(A.4)}$$

Supongamos que hemos elegido una función específica $\psi(x)$ y que $z(x,\varepsilon)$ expresa una familia de funciones tal que:

$$z(x,\varepsilon) = y(x) + \varepsilon\ \psi(x) \qquad \text{(A.5)}$$

donde ε, que es un número real especificado, nos da para cada valor una función diferente $z(x)$, siendo $z(x, \varepsilon)$ una función contínua con el mismo número de esquinas que $y(x)$.

Supongamos que ε es suficientemente pequeño y que $z(x, \varepsilon)$ es una función en las proximidades de $y(x)$, y que z' e y' también están próximas.

A la vista de estos supuestos, nos referiremos a $\varepsilon.\psi(x)$ como a la variación de $y(x)$, esto es:

$$\varepsilon.\psi(x) = \delta\ y(x)$$

Dado que hemos supuesto que $y(x)$ es un extremo del funcional (A.1) y que $z(x, \varepsilon)$ es una función admisible para cada ε, siendo $\varepsilon > 0$, entonces se seguirá que:

$$I(z) - I(y) \leqslant 0 \qquad \forall \varepsilon\ ,\ \varepsilon > 0$$

Si $\psi(x)$ es una función específica y fijada y sólo varía ε, entonces $I(z)$ será una función de ε que puede expresarse:

$$I\left[z(x,\varepsilon)\right] = J(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F\left[x,\ Z(x,\varepsilon),\ Z'(x,\varepsilon)\right]\, dx \tag{A.6}$$

Obviamente, cuando $\varepsilon = 0$, se seguirá que:

$$z(x,\ 0) = y(x)$$
$$J(0) = I(y)$$

Por tanto, $J(\varepsilon) - J(0) \leqslant 0$ para todo ε positivo y suficientemente pequeño.

Si hemos supuesto que $y(x)$ es la trayectoria o función que maximiza $I(y)$, entonces $J(\varepsilon)$ debe tener un óptimo en $y = z$, esto es, en $\varepsilon = 0$. En términos analíticos ésto se traduce en que

$$\left.\frac{dJ}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \tag{A.8}$$

Calculando el valor de la derivada en (A.6) tendremos:

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}\, dx = 0 \tag{A.9}$$

donde el integrando es:

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial z'}\,\frac{\partial z'}{\partial \varepsilon} = F_z \psi(x) + F_{z'} \psi'(x) \qquad (A.10)$$

Llevando (A.10) a (A.9) tenemos que:

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = \int_a^b \left| F_z \cdot \psi(x) + F_{z'} \psi'(x) \right| dx \qquad (A.11)$$

Obsérvese que cuando $\varepsilon = 0$, los argumentos de F_z y de $F_{z'}$ son $(y\ y')$ respectivamente.

Integrando por partes el segundo sumando de (A.11),

$$\int_a^b F_{z'}\ \psi'(x)\ dx = \frac{\partial F}{\partial z'} \cdot \psi(x) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} F_{z'} \psi(x)\ dx \qquad (A.12)$$

Sustituyendo (A.12) en (A.11), éste se transforma en:

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = \int_a^b \left| F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} \right| \psi(x)\ dx \qquad (A.13)$$

ya que el primer sumando de (A.12) es cero si tenemos en cuenta la condición (A.4).

Si para $\varepsilon = 0$ ha de satisfacerse que $\frac{dJ}{d\varepsilon} = 0$, entonces (A.13) es

$$\left.\frac{dJ}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right) \psi(x)\, dx = 0 \tag{A.14}$$

Para que se satisfaga (A.14) para un $\psi(x)$ arbitrario, la expresión entre paréntesis debe ser cero para todo x tal que $a \leq x \leq b$. Luego, desde (A.14) obtenemos

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \tag{A.15}$$

expresión conocida como la ecuación de Euler-Lagrange, que constituye la condición necesaria que una función o trayectoria óptima y(x) satisface en todo intervalo sin esquinas.

Resumiendo los resultados obtenidos tenemos que, una vez supuesto que y(x) es la función que maximiza el funcional I(y). Entonces, en algún intervalo $[x_o \quad x_1]$ que no contenga una esquina de y(x), la solución propuesta y(x) debe satisfacer la ecuación (A.15) si el máximo es un máximo interior.

Si y(x) tiene un número finito de esquinas, entonces la solución se construirá por unión de dos o más trozos de soluciones específicas a la ecuación de Euler (A.15).

Dado que el integrando de (A.1) se ha supuesto que pertenece a C", derivando el segundo término de (A.15) respecto a x tendremos:

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = \frac{\partial F_{y'}}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F_{y'}}{\partial x} \frac{dx}{dx} =$$

$$= (F_{y'y'})\, y'' + (F_{y'y})\, y' + F_{y'} \qquad \text{(A.16)}$$

Llevando (A.16) a (A.15) la ecuación de Euler quedará como una ecuación diferencial de segundo orden:

$$F_y - (F_{y'y'}).Y'' - (F_{y'y})\, y' - F_{y'x} = 0 \qquad \text{(A.17)}$$

Según la expresión (A.17) para la ecuación de Euler, esta condición necesaria del Cálculo de Variaciones es una ecuación diferencial de segundo orden. Generalmente no lineal para las condiciones de contorno dadas:

$$y(x_o) = y_o$$

$$y(x_1) = y_1$$

El método matemático que hemos seguido para derivar la primera condición necesaria, ecuación de Euler, no es el único y, en este sentido, parece oportuno, siguiendo los pasos de otros autores (1) en la

---

(1) Entre ellos, Miller (1979)

materia, dar una forma alternativa de derivación de la ecuación de Euler basada en la primera variación del funcional I.

El problema variacional planteado trata de encontrar de entre todas las funciones admisibles $y(x)$ que pasan por los puntos $(x_o \quad y_o)$ y $(x_1 \quad y_1)$ la curva para la cual el funcional

$$I(y) = \int_{x_o}^{x_1} F(x, y, y')\, dx \qquad (A.18)$$

tiene un máximo.

Definamos, como en la demostración anterior, una función admisible

$$z(x) = y(x) + \delta\, y(x) \qquad (A.19)$$

siendo

$$\delta\, y(x) = \varepsilon . \psi(x)$$

Formando el funcional de z, tendremos:

$$I|y \quad \varepsilon\psi(x)| = I(z) = \int_{x_o}^{x_1} F|x, y(x)+\varepsilon\psi(x), y'(x)+\varepsilon\psi'(x)|dx \qquad (A.20)$$

El incremento del funcional (A.18), utilizando el desarrollo de Taylor, será:

$$\Delta I = I|y + \varepsilon\psi(x)| - I(y) =$$

$$= \varepsilon \int_{x_o}^{x_1} |F_y(x,y,y').\psi(x) + F_{y'}(x,y,y').\psi'(x)|\, dx \quad \ldots \qquad (A.21)$$

donde los puntos suspensivos reflejan la existencia de términos de orden superior a uno para $\psi(x)$ y $\psi'(x)$.

La variación de I (δI) será igual a la parte lineal principal de ΔI y, por tanto,

$$\delta I = \varepsilon \int_{x_o}^{x_1} \left[F_y(x,y,y').\psi(x) + F_{y'}(x,y,y').\psi'(x)\right] dx \tag{A.22}$$

Ahora bien, una condición necesaria para que el funcional diferenciable I(y) tenga un extremo en y = y(x) es que la variación de I (δI) desaparezca en y = y(x), esto es, que:

$$\delta I = 0$$

Integrando por partes el segundo sumando de (A.22):

$$\int_{x_o}^{x_1} F_{y'}(x,y,y')\psi'(x)\, dx = F_{y'}\psi(x)\Big|_{x_o}^{x_1} - \int_{x_o}^{x_1} \frac{d}{dx} F_{y'}\psi\, dx \tag{A.23}$$

y teniendo en cuenta que $\psi(x_o) = \psi(x_1) = 0$, (A.23) se reduce a

$$\int_{x_o}^{x_1} F_{y'}\cdot\psi'\, dx = -\int_{x_o}^{x_1} \frac{d}{dx} F_{y'}\,\psi\, dx \tag{A.24}$$

Llevando este resultado a (A.22) tendremos que la primera variación del funcional es equivalente a:

$$\delta I = \varepsilon \int_{x_o}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) \; \psi(x) \; dx = 0 \qquad (A.25)$$

Dado que ε y $\psi(x)$ son arbitrarios, la condición $\delta I = 0$ conduce a que:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \qquad (A.26)$$

que es la ecuación de Euler.

La ventaja de esta forma de derivar la ecuación de Euler sobre la anterior es que la derivación de las condiciones suficientes a partir de la segunda variación del funcional I es prácticamente inmediata.

Casos especiales de la Ecuación de Euler.-

La ecuación de Euler juega un papel fundamental en el Cálculo de Variaciones. En este sentido, vamos a estudiar brevemente distintos casos especiales del funcional integrando de (A.1), que conducirán a diferentes formas de la ecuación de Euler.

1º) Sea F(...) un funcional que no depende de y(x), esto es,

$$I(y) = \int_{x_o}^{x_1} F(x, y')\, dx$$

En este caso, la ecuación de Euler responderá a la forma

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

lo que implica que

$$F_{y'} = K$$

siendo K una constante, y, por tanto,

$$y' = f(x, K)$$

2º) Sea F(...) un funcional independiente de x, esto es, sea

$$I(y) = \int_{x_o}^{x_1} F(y, y')\, dx$$

En este caso, la ecuación de Euler será:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = F_y - F_{y'y} \cdot y' - F_{y'y'} \cdot y''$$

Multiplicando por y' la expresión anterior, ésta queda:

$$F_y \cdot y' - F_{y'y} \cdot y'^2 - F_{y'y'} \cdot y'y'' = \frac{d}{dx}(F - F_{y'} y')$$

Por tanto, la ecuación de Euler es:

$$F - y' . F_{y'} = C$$

siendo C una constante.

3º) Por último, F(...) no depende de y', esto es:

$$I(y) = \int_{x_o}^{x_1} F(x, y)\, dx$$

En este caso la ecuación de Euler es:

$$F_y(x, y) = 0$$

b) Condiciones de Esquina de Weierstrass-Erdmann.-

Si la función admisible y(x) que optimiza el funcional (A.1) tiene esquinas, además de probar que la solución es la unión de las diferentes soluciones que satisfacen la ecuación de Euler, queda estudiar las condiciones que la función óptima $y_o(x)$ debe satisfacer en esas esquinas.

Supongamos que y(x) tiene una esquina en un punto x^* del intervalo $[x_o \; x_1]$ tal que $x_o < x^* < x_1$ siendo este valor de x el único en el cual y(x) tiene una esquina. El problema variacional podrá formularse como:

"De entre todas las funciones y(x) contínuas con derivadas en todos los puntos del intervalo $|x_o \; x_1|$ excepto en x^* y que satisfacen las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} y(x_o) &= y_o \\ y(x_1) &= y_1 \end{aligned} \qquad (A.27)$$

encontrar la función para la cual el funcional

$$I(y) = \int_{x_o}^{x_1} F(x,\, y,\, y')\, dx \qquad (A.28)$$

tiene un máximo".

Si la esquina está en el punto x^*, el intervalo total $[x_o \quad x_1]$ puede ser dividido en dos intervalos $[x_o \quad x^*]$ y $[x^* \quad x_1]$. Para cada uno de estos intervalos la función que optimiza el funcional (A.28) debe satisfacer la ecuación de Euler (A.15).

Definamos como en (A.5) la función z, tal que:

$$z(x, \varepsilon) = y(x) + \varepsilon . \psi(x)$$

para ε suficientemente pequeños. Al ser $z(x, \varepsilon)$ un conjunto de funciones admisibles, tendrá una derivada en cada punto del intervalo $[x_o \quad x_1]$ excepto en x^*.

Calculando el valor del funcional I(z) en el intervalo $[x_o \quad x_1]$, tendremos:

$$I(z) = \int_{x_o}^{x^*} F|x, z(x,\varepsilon), z'(x,\varepsilon)|\, dx \; + \\ + \int_{x^*}^{x_1} F|x, z(x,\varepsilon), z'(x,\varepsilon)|\, dx \qquad \text{(A.29)}$$

Para un valor de $\psi(x)$ fijado, el funcional (A.29) será una función de ε, esto es,

$$I(z) = J(\varepsilon) \qquad \text{(A.30)}$$

Por tanto, para $\varepsilon = 0$, desde (A.30) se sigue que

$$I(y) = J(0) \qquad \text{(A.31)}$$

y que consiguientemente $J(\varepsilon)$ tiene un máximo en $\varepsilon = 0$.

En otros términos,

$$\left.\frac{dJ}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \tag{A.32}$$

Calculando el valor de (A.32) tendremos:

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = \int_{x_o}^{x^*} |F_z \psi(x) + F_{z'} \psi'(x)|\, dx \; + \\ + \int_{x^*}^{x_1} |F_z \psi(x) + F_{z'} \psi'(x)|\, dx \tag{A.33}$$

Integrando por partes y teniendo en cuenta que estamos en extremos fijos y por tanto

$$\psi(x_1) = \psi(x_o) = 0$$

desde (A.33) obtenemos

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = \int_{x_o}^{x^*} (F_z - \frac{d}{dx} F_{z'}) \psi(x) dx \quad \int_{x^*}^{x_1} (F_z - \frac{d}{dx} F_{z'}) \psi(x) dx \tag{A.34}$$

Como, para $\varepsilon = 0$, se satisface que

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = 0$$

entonces, para un $\psi(x)$ arbitrario se sigue que:

$$\left[F_{y'}\left[x^*, y(x^*),\ y'_-(x^*)\right] - F_{y'}\left[x^*,\ y(x^*),\ y'_+(x^*)\right]\right]\psi(x^*) = 0 \tag{A.35}$$

Como $\psi(x^*)$ no es en general cero, tendrá que verificarse que:

$$F_{y'}|x^*,\ y(x^*),\ y'_-(x^*)| - F_{y'}|x^*,\ y(x^*),\ y'_+(x^*)| = 0 \tag{A.36}$$

o, lo que es lo mismo, que $F_{y'}$ sea contínua en x^*, esto es, que:

$$\lim_{x \to x^*_+} F_{y'} = \lim_{x \to x^*_-} F_{y'} \tag{A.37}$$

Esta condición, llamada condición de esquina de Weierstrass-Erdmann, que hemos demostrado para el caso en que la función que optimiza el funcional (A.28) tiene una esquina, es aplicable a funciones con un número finito de esquinas, donde en cada esquina una condición similar a (A.37) debe satisfacerse.

Haciendo un breve resumen sobre la primera condición necesaria que la función considerada óptima debe satisfacer, tenemos que si y(x) es una función admisible que optimiza el funcional (A.1), entonces es necesario que:

i) En algún intervalo que la función óptima no tenga esquinas, dicha función satisfaga la ecuación de Euler

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

en cada punto del intervalo.

ii) Si $y(x)$ tiene una esquina en el punto x^* del intervalo $[x_o \quad x_1]$, por las condiciones de esquina de Weierstrass-Erdmann se sigue que $F_{y'}$ debe ser contínua en x^*.

Por último, señalar que el problema variacional con $x_1^0 = \infty$ no será tratado en nuestro trabajo ya que, desde el punto de vista de aplicaciones económicas, no lo consideramos relevante. No obstante, un tratamiento exhaustivo sobre horizonte infinito puede encontrarse en Hadley-Kemp (1971), Gelfand y Fomin (1963), entre otros.

A.2.2. Otras Condiciones necesarias: Las condiciones de Legendre y de Weierstrass.

En el Cálculo de Variaciones, del mismo modo que en el cálculo diferencial ordinario, la distinción entre una función que maximiza el funcional (A.1) y una que lo minimiza puede estudiarse por el signo de la segunda variación, esto es, por el signo de $\delta^2 I$. Por tanto, además de la ecuación de Euler y de las condiciones de Weierstrass-Erdmann, una condición necesaria que la función óptima y(x) debe satisfacer es que (1):

$$\delta^2 I \leq 0 \tag{A.38}$$

Para obtener esta condición necesaria partiremos del incremento del funcional (A.1), esto es:

$$\Delta I = I[y + \varepsilon\ \psi(x)] - I(y) \tag{A.39}$$

Aplicando el desarrollo de Taylor y teniendo en cuenta la definición de segunda variación de una funcional que da Gelfand y Fomin(2):

---

(1) Un análisis alternativo de estas condiciones se encuentra en Hadley-Kemp (1971).

(2) Véase en este sentido definición y explicación en Gelfand y Fomin (1963).

$$\delta^2 I = \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{x_o}^{x_1} \left[F_{yy} [\psi(x)]^2 + 2F_{yy'} \psi(x)\psi'(x) + F_{y'y'} [\psi'(x)]^2 \right] dx \tag{A.40}$$

Integrando por partes el segundo sumando y observando que $\psi(x_o) = \psi(x_1) = 0$, llegamos a obtener que la segunda variación del funcional queda expresada

$$\delta^2 I = \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{x_o}^{x_1} \left[F_{y'y'} [\psi'(x)]^2 + (F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'}) [\psi(x)]^2 \right| dx \tag{A.41}$$

Haciendo el cambio:

$$\begin{aligned} F_{y'y'} &= P \\ F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'} &= Q \end{aligned} \tag{A.42}$$

la segunda variación del funcional se expresará:

$$\delta^2 I = \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{x_o}^{x_1} \left| P|\psi'(x)|^2 + Q|\psi(x)|^2 \right| dx \tag{A.43}$$

Si la condición necesaria para que un funcional como (A.1) tenga un máximo se traduce en que $\delta^2 I \leqslant 0$, entonces, en términos de la expresión para la segunda variación del funcional, ésto es equivalente a que $P = F_{y'y'} \leqslant 0$.

Para establecer la condición necesaria que haga a $\delta^2 I \leqslant 0$ consideraremos la expresión (A.43).

Dado que $\psi(x_o) = 0$, entonces $\psi(x)$ será pequeña en el intervalo $[x_o \;\; x_1]$ si su derivada $\psi'(x)$ es pequeña (1). Sin embargo lo contrario no es cierto. Podemos entonces construir una función $\psi(x)$ que sea en sí misma pequeña pero que tenga una derivada $\psi'(x)$ en $[x_o \;\; x_1]$ grande. Estos razonamientos nos llevan a que en (A.43) el término dominante sea $P[\psi'(x)]^2$. Consiguientemente, el signo de la segunda variación estará guiado por el de P. Si hemos hecho el cambio

$$P = F_{y'y'}$$

podemos concluir que una condición necesaria para que la segunda variación del funcional (A.1) sea menor o igual a cero es que $F_{y'y'}$ sea menor o igual a cero.

Por tanto, si $\delta^2 I \leqslant 0$ es una condición necesaria para que la función y(x) dé un máximo del funcional (A.1), tendremos que una condición necesaria para que y(x) sea un máximo del funcional I(y) con extremos fijos es que $F_{y'y'} \leqslant 0$ para todo $x \in [x_o \;\; x_1]$.

Del mismo modo, una condición necesaria para que y(x) dé un mínimo del funcional (A.1) es que $F_{y'y'} \geqslant 0$. Estas condiciones son denominadas condiciones necesarias de Legendre.

---

(1) Estos razonamientos son los utilizados por Miller (1979) en el Capítulo 3.

A.2.3. La Suficiencia

Con el estudio de las condiciones necesarias hemos determinado un conjunto de condiciones que la función óptima, en este caso y(x), debe satisfacer. Pero este conjunto de requerimientos no resuelve el dilema en el caso en el que existan varias funciones que satisfagan las condiciones necesarias.

Este tipo de problemas hace plantearnos un conjunto de condiciones denominadas suficientes cuya misión es garantizar, para una función que las satisfaga, que una solución a las condiciones necesarias produce verdaderamente un óptimo. Este conjunto de condiciones proporcionan un óptimo global.

Es preciso recordar aquí que en los problemas de optimización ordinarios el signo de la segunda diferencial es simplemente un requerimiento sobre la forma de la función en el punto donde la primera diferencial es cero; esto es, sirven para ver la convexidad o concavidad. En este sentido, veremos que en el Cálculo de Variaciones si el integrando del funcional objetivo F(...) es una función cóncava de (yy'), $\forall x \in [x_0 \quad x_1]$ entonces el cumplimiento de la ecuación de Euler más las condiciones de esquina son suficientes para un máximo global y no local (1).

(1) Véase para un análisis más detallado Hadley-Kemp (1971).

Esta versión de la suficiencia basada en la concavidad o convexidad de las funciones es de gran interés práctico, ya que éstas son propiedades muy comunes en las funciones que integran un gran número de aplicaciones del Cálculo de Variaciones.

Condiciones Suficientes clásicas.-

Para el estudio de lo que se ha venido a llamar "condiciones suficientes clásicas" seguiremos a Miller (1979) y Gelfand y Fomin (1963), que parten de la condición necesaria de Legendre.

Las condiciones que aseguran negatividad o positividad estricta de la segunda variación del funcional ($\delta^2 I$) son algo más complicadas de obtener. Esta complicación surge al no ser adecuado requerir que $F_{y'y'} \leqslant 0$ para garantizar que $\delta^2 I < 0$, o bien que $F_{y'y'} \geqslant 0$ para asegurar que $\delta^2 I > 0$.

Sea w(x) una función diferenciable tal que, manteniendo el supuesto de $\psi(x_o) = \psi(x_1) = 0$, satisface:

$$\int_{x_o}^{x_1} \frac{d}{dx} w(x) \left[\psi(x)\right]^2 dx = w(x) \left[\psi(x)\right]^2 \Big|_{x_o}^{x_1} = 0 \tag{A.44}$$

Desarrollando el cuadrado del integrando de (A.44) se cumplirá que

$$\int_{x_o}^{x_1} \left[w'(x)\,[\psi(x)]^2 + 2w(x)\psi(x)\psi'(x) \right] dx = 0 \tag{A.45}$$

Una expresión como (A.45) puede ser agregada a cualquier otra, como por ejemplo a (A.43) y ésta no variar. Así, puede escribirse desde (A.43) y (A.45) que:

$$\delta^2 I = \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{x_o}^{x_1} \left| P|\psi'(x)|^2 + 2w(x)\psi(x)\psi'(x) + \right.$$
$$\left. + |Q + w'(x)|\,|\psi(x)|^2 \right| dx \tag{A.46}$$

Supongamos ahora que P es menor que cero. Esto es, $P < 0$. Al ser P distinto de cero podemos dividir (A.46) por P y obtener

$$\delta^2 I = \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{x_o}^{x_1} P\left[|\psi'(x)|^2 + \frac{2w(x)\,\psi(x)\,\psi'(x)}{P} + \right.$$
$$\left. + \frac{Q + w'(x)}{P} |\psi(x)|^2 \right] dx \tag{A.47}$$

La expresión (A.47) puede escribirse como un cuadrado perfecto, esto es:

$$\delta^2 I = \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{x_o}^{x_1} P\left| \psi'(x) + \frac{w(x)}{P} \cdot \psi(x) \right|^2 dx \tag{A.48}$$

Si $P < 0$ y la expresión entre corchetes es distinta de cero, entonces $\delta^2 I$ será menor que cero. Luego la condición sobre $w(x)$ bajo la cual (A.47) puede expresarse como cuadrado perfecto es que:

$$[w(x)]^2 = P[Q + w'(x)] = P.Q + P.w'(x) \qquad (A.49)$$

Donde (A.49) es una ecuación diferencial de primer orden no lineal en $w(x)$, llamada ecuación Riccati. Este tipo de ecuaciones pueden ser transformadas en lineales mediante el siguiente cambio de variables:

$$w(x) = -\left[v'(x) \,/\, v(x)\right].P \qquad (A.50)$$

siendo $v(x)$ una función distinta de cero. Hallando la derivada de $w(x)$ en (A.50) y sustituyendo este valor en (A.49), tendremos:

$$Q.v(x) - \frac{d}{dx}\left[P.v'(x)\right] = 0 \qquad (A.51)$$

que es una ecuación diferencial lineal de segundo orden en $v(x)$.

Por tanto, tenemos lo siguiente:

a) Si (A.51) tiene una solución para la cual $v(x) \neq 0$ en cualquier parte del intervalo abierto (x_o, x_1), entonces (A.50) da una solución de la ecuación Riccati (A.49) sobre ese intervalo.

b) Entonces se sigue que (A.48) es una expresión válida para $\delta^2 I$ y por tanto $\delta^2 I$ será estrictamente negativa si $P = F_{y'y'} < 0$ y $\left[\psi'(x) + \frac{w(x)}{P}\,\psi(x)\right]^2 \neq 0$. Como el integrando en (A.48) depende de x, $\Psi(x)$ y $\Psi'(x)$; esto es:

$$\delta^2 I = \varepsilon^2 \int_{x_o}^{x_1} G\left[x,\ \psi(x),\ \psi'(x)\right]\, dx \qquad (A.52)$$

donde:

$$G = \frac{1}{2}\,\{P\left[\psi'(x)\right]^2 + Q\left[\psi(x)\right]^2\} \qquad (A.53)$$

La expresión (A.52) es un funcional similar a (A.1) para el cual hay una ecuación de Euler de la forma:

$$G_{\psi} - \frac{d}{dx}\,G_{\psi'} = 0 \qquad (A.54)$$

En efecto, dada la definición de G, esta ecuación es:

$$Q.\psi(x) - \frac{d}{dx}\left[P.\psi'(x)\right] = 0 \qquad (A.55)$$

Comparando con (A.51) vemos que la función v(x) que satisface esta ecuación es la misma que la función $\Psi(x)$ que satisface (A.54), esto es, que v(x) debe ser una solución a la ecuación Euler-Lagrange para el funcional en $\delta^2 I$. Esta ecuación Euler-Lagrange es conocida como la ecuación Jacobi. El punto en el cual la ecuación Jacobi es igual a cero se llama punto conjugado. Esto es, x_a se dice que es conjugado a x_o si la ecuación Jacobi (A.51) tiene una solución

$v(x)$ para la cual $v(x_o) = 0$ y $v(x_a) = 0$ cuando $v(x) \not\equiv 0$ En estos términos, si no hay puntos conjugados en $[x_o, x_1]$ a x_o, entonces la ecuación Jacobi tiene una solución $v(x)$ distinta de cero a través de $(x_o, x_1]$ y consiguientemente $w(x)$ está definida sobre el intervalo haciendo que (A.48) sea una representación válida para $\delta^2 I$.

Si suponemos que no hay puntos conjugados a x_o en $[x_o \; x_1]$ entonces, usando (A.39), la expresión para $\delta^2 I$ desde (A.48) puede escribirse

$$\delta^2 I_o = \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{x_o}^{x_1} P \left[\frac{\psi'(x).v(x) - \psi(x).v'(x)}{v(x)}\right]^2 dx \tag{A.56}$$

Consiguientemente, dado que hemos supuesto $P<0$ $\delta^2 I$, será cero solamente si la expresión al cuadrado es cero sobre el intervalo $[x_o, x_1]$. Para que ésto sea cierto se habrá de satisfacer que

$$\psi'(x).v(x) - \psi(x).v'(x) = 0$$

sobre el intervalo total. La solución a esta ecuación será del tipo

$$v(x) = c.\ \psi(x)$$

siendo c una constante arbitraria. Sin embargo, dado que $\psi(x_o) = \psi(x_1) = 0$, ésto nos llevará a que

$v(x_o) = v(x_1) = 0$. Ya que hemos supuesto la no existencia de puntos conjugados en $[x_o \ \ x_1]$, se seguirá que $v(x_1) \neq 0$, y así la expresión entre corchetes no puede ser cero. Por tanto, hemos llegado a que:

i) Si $F_{y'y'} < 0$ en $[x_o \ \ x_1]$ y si $[x_o \ \ x_1]$ no contiene puntos conjugados a x_o, entonces $\delta^2 I < 0$, $\forall\ \psi(x)$, con $\psi(x_o) = \psi(x_1) = 0$.

ii) Si $F_{y'y'} < 0$ en $[x_o \ \ x_1]$ y si $\delta^2 I < 0$, $\forall \psi(x)$ con $\psi(x_o) = \psi(x_1) = 0$, entonces el intervalo $[x_o \ \ x_1]$ no contiene puntos conjugados a x_o.

iii) Si $F_{y'y'} < 0$ en $[x_o \ \ x_1]$ y si $\delta^2 I \leqslant 0$, $\forall \psi(x)$ con $\psi(x_o) = \psi(x_1) = 0$, entonces el intervalo abierto (x_o, x_1) no contiene puntos conjugados a x_o.

Los tres puntos de arriba permiten el caso de x_1 como punto conjugado. Sin embargo, una nueva condición necesaria se deriva de forma inmediata:

- Si $y(x)$ es un máximo del funcional (A.1) y si $F_{y'y'} < 0$ sobre el intervalo $x_o \leqslant x \leqslant x_1$, entonces el intervalo abierto (x_o, x_1) no contiene puntos conjugados a x_o. Esta es la condición necesaria de Jacobi. Como resumen de esta nueva condición, se puede señalar que con $F_{y'y'} < 0$ la ausencia de pun tos conjugados en $(x_o \;\; x_1)$ es condición necesaria para que $\delta^2 I \leqslant 0$, y $\delta^2 I \geqslant 0$ vuelve a ser necesaria para un máximo.

Como resumen de las condiciones suficientes podemos concluir que:

Si para el funcional $\int_{x_o}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$ hay un $y(x)$ donde $y(x_o) = y_o$, $y(x_1) = y_1$ que satisface:

a) La ecuación de Euler

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

b) La condición de Legendre en sentido estricto

$$F_{y'y'} < 0$$

c) La condición de Jacobi (más estricta):

"el intervalo cerrado $[x_o \;\; x_1]$ no contiene puntos conjugados a x_o".

entonces el funcional tiene un máximo débil para $y = y(x)$ y por tanto las condiciones a), b) y c) son suficientes. Esto es,

Si $F_{y'y'} < 0$ sobre $[x_o \;\; x_1]$, entonces $\delta^2 I < 0$, $\forall\, \psi(x)$ con $\psi(x_o) = \psi(x_1) = 0$ si y sólo si el intervalo $[x_o \;\; x_1]$ no contiene puntos conjugados a x_o.

Por lo que se refiere a las condiciones necesarias y suficientes para un máximo o mínimo en sentido estricto, éstas se concentran en la condición de Weierstrass. La demostración de la condición necesaria y suficiente de Weierstrass parte de la función denominada exceso, definida por:

$$E(x,y,y',z') = F(x,y,z') - F(x,y,y') -(z'-y')F_{y'}(x,y,y') \tag{A.57}$$

Esta función mide, para las dos funciones admisibles y(x) y z(x), la diferencia entre la función intermedia F(...) evaluada en z' y los dos primeros términos de la expansión de las series de Taylor de F cerca del punto y'. Por medio de esta función tenemos que:

------ Si $E(x,y,y',z') < 0$, entonces $\int_{x_o}^{x_1} F(x,y,y')\,dx$ con $y(x_o) = y_o$, $y(x_1) = y_1$, tiene:

i) un máximo fuerte para $y = y(x)$. Esta es la condición suficiente de Weierstrass para un máximo strong. Del mismo modo,

ii) Una condición necesaria para que $y = y(x)$ dé un máximo del funcional $\int_{x_o}^{x_1} F(x,y,y')\,dx$ donde $y_o = y(x_o)$, $y_1 = y(x_1)$ es que $E(x,y,y',z') \leqslant 0$.

La Suficiencia desde el punto de vista de la concavidad.-

Vamos a centrarnos en la forma de suficiencia que se basa en las propiedades de las funciones cóncavas y convexas. La importancia de esta modalidad de suficiencia está por un lado en la sencillez de los cálculos y por otro en lo común que es encontrarnos con funciones cóncavas o convexas en las aplicaciones del Cálculo de Variaciones a problemas económicos.

En este sentido, parece oportuno comenzar el estudio recordando algunas propiedades de las funciones en cuestión.

Sea f(x) una función definida sobre el conjunto abierto y convexo X que es un subconjunto de R^m. La función f(x) se llama cóncava sobre X si dados dos puntos cualesquiera de X, x_1 y x_2, y algún λ tal que $0 \leq \lambda \leq 1$, se cumple que:

$$f[\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1] \geq \lambda . f(x_2) + (1-\lambda) f(x_1) \qquad (A.58)$$

Si la desigualdad es estricta, la función f(x) se denomina estrictamente cóncava.

Si la función f(x) es tal que $f \in C'$, esto es, que tiene primeras derivadas y éstas son contínuas, la condición de concavidad se simplifica bastante haciendo uso del desarrollo de Taylor. Es decir, si antes hemos definido f(x) como cóncava del siguiente modo:

$$f[\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1] \geqslant \lambda f(x_2) + (1-\lambda)f(x_1)$$

podemos desarrollar el miembro del lado izquierdo por Taylor, y así

$$f[\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1] = f[x_1 + \lambda(x_2-x_1)] =$$

$$= f(x_1) + \lambda \text{grad.} f[x_1+\theta\lambda(x_2-x_1)](x_2-x_1) \qquad \text{(A.59)}$$

donde $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Ahora bien, si f(x) es cóncava y $\lambda > 0$, entonces:

$$\lambda f(x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + \text{grad.} f(x_1 + \theta\lambda)(x_2-x_1) \qquad \text{(A.60)}$$

Dividiendo por λ:

$$f(x_2) \leqslant f(x_1) + \text{grad.} f(x_1 + \theta\lambda)(x_2 - x_1) \qquad \text{(A.61)}$$

y tomando límites cuando $\lambda \to 0$, tendremos que

$$f(x_2) \leqslant f(x_1) + \text{grad.} f(x_1).(x_2 - x_1) \qquad \text{(A.62)}$$

nos define que f(x) / $f \in C'$ es una función cóncava(1).

---

(1) Por razonamientos análogos Hadley-Kemp obtienen la expresión para funciones con segundas derivadas contínuas. Véase Hadley-Kemp (1971).

Volvamos ahora al problema variacional que nos ocupa. Si $F(x,y,y')$ de (A.1) es una función cóncava de las variables $(y\ y')$ para todo x, tal que $x_o \leqslant x \leqslant x_1$, entonces la función $y(x)$ que satisface las condiciones necesarias nos da un máximo absoluto del funcional (A.1) sobre el conjunto de funciones admisibles. Probemos esta afirmación:

Sea $z(x)$ alguna función admisible (esto es, contínua con esquinas y que pasa por los puntos x_o y x_1) que difiere de la trayectoria óptima $y(x)$ según las expresiones:

$$\begin{aligned} z(x) - y(x) &= \psi(x) \\ z'(x) - y'(x) &= \psi'(x) \end{aligned} \tag{A.63}$$

Si $y(x)$ hemos supuesto que es la función que optimiza (A.1), se seguirá que

$$I(z) \leqslant I(y) \tag{A.64}$$

Si al integrando $F(\ldots)$ del funcional (A.1) le hemos exigido tener primeras derivadas contínuas, se puede, a partir de la propiedad expuesta sobre las funciones cóncavas con primeras derivadas, llegar a formular que:

$$F(x,z,z') \leqslant F(x,y,y') + F_y(x,y,y').\psi + \\ + F_{y'}(x,y,y').\psi' \tag{A.65}$$

Integrando los dos miembros de (A.65) desde x_o a x_1, tendremos:

$$\int_{x_o}^{x_1} F(x,z,z')\,dx \leqslant \int_{x_o}^{x_1} F(x,y,y')\,dx \; + $$
$$+ \int_{x_o}^{x_1} (F_y \cdot \psi + F_{y'} \cdot \psi')\,dx \qquad \text{(A.66)}$$

o bien, sustituyendo el valor del funcional:

$$I(z) \leqslant I(y) + \int_{x_o}^{x_1} (F_y \cdot \psi + F_{y'} \cdot \psi')\,dx \qquad \text{(A.67)}$$

Además, dado que entre las esquinas de la solución óptima el término $\frac{d}{dx} F_{y'}$ existe, entonces en (A.67) puede integrarse por partes el segundo sumando del lado derecho y tendremos

$$\int_{x_o}^{x_1} F_y\psi\,dx + \int_{x_o}^{x_1} F_{y'}\psi'\,dx = \int_{x_o}^{x_1} F_y\psi\,dx \; -$$
$$- \int_{x_o}^{x_1} \frac{d}{dx} F_{y'}\psi dx + \psi F_{y'}$$

(A.68)

ya que $\psi(x_1) = \psi(x_o) = 0$.

Si llamamos $a_1, \ldots, a_{m-1}$ a los valores de x en los cuales $y(x)$ tiene una esquina, siendo además $x_o = a_o$ y $x_1 = a_m$, la expresión (A.68) puede reescribirse en los siguientes términos:

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \left[F_y(x,y,y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x,y,y')\right]\psi(x)\, dx \quad +$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} \left[F_{y'}\left[a_i, y(a_i), y'_-(a_i)\right] - F_{y'}\left[a_i, y(a_i), y'_+(a_i)\right]\right] \psi(a_i)$$

(A.69)

Al ser $\psi(x_o) = \psi(x_1) = 0$, en el segundo sumatorio de (A.69) no aparecen términos en $i = 0$ e $i = m$.

Si, además, entre las esquinas de la solución óptima se ha de satisfacer la ecuación de Euler y en las esquinas las condiciones de Weierstrass-Erdmann, entonces (A.69) se hace cero y desde (A.67) obtenemos que:

$$I(z) \leqslant I(y)$$

y se puede concluir que la función $y = y(x)$ da un máximo absoluto o global del funcional (A.1) sobre el espacio de funciones admisibles.

Si además de las condiciones expuestas anteriormente, el integrando F(...) fuera una función estrictamente cóncava sobre todo el espacio de funciones admisibles, entonces la función óptima $y(x)$ que maximiza el funcional objetivo (A.1) es única (1).

---

(1) Para un estudio más detallado de máximos y mínimos absolutos y únicos, véase Benavie (1973).

A.3. GENERALIZACION A "n" FUNCIONES VARIABLES

Sea $F(x_1, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')$ una función con primeras y segundas derivadas contínuas respecto a todos sus argumentos. Consideremos el problema de determinar las condiciones necesarias para un extremo (máximo o mínimo) de un funcional de la forma:

$$I(y_1 \ldots y_n) = \int_{x_o}^{x_1} F(x_1, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\, dx \tag{A.70}$$

que depende de n funciones contínuamente diferenciables $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ que satisfacen las condiciones de puntos finales fijados siguientes:

$$\left.\begin{aligned} y_i(x_o) &= y_{io} \\ y_i(x_1) &= y_{i1} \end{aligned}\right. \quad \forall i = 1, \ldots, n \tag{A.71}$$

En otras palabras, el objetivo es hallar un extremo del funcional (A.70) definido sobre el conjunto de curvas que unen (ó pasan a través de) los puntos finales fijados (A.71) en el espacio Euclidiano E^{2n+1}.

Para hallar las condiciones necesarias para que el funcional (A.70) tenga un extremo, calculamos el incremento del funcional. Siguiendo pasos similares al caso más simple, tendremos que:

$$\Delta I = I[y_1 + \varepsilon_1\psi_1(x), \ldots, y_n + \varepsilon_n\psi_n(x)] - I(y_1,\ldots,y_n) \tag{A.72}$$

Dado que:

$$\Delta I = \delta I + \text{términos de orden más alto que uno en } \varepsilon_i\psi_i \;,\; \varepsilon_i\psi_i' \;(\forall i/\ i=1,\ldots,n) \tag{A.73}$$

Entonces, usando el teorema de Taylor,

$$\Delta I = \int_{x_o}^{x_1} F(x_1,\ldots, y_i+\varepsilon_i\psi_i, \ldots, y_i+\varepsilon_i\psi_i')dx - $$

$$- F(x_1, \ldots, y_i, y_i', \ldots)\, dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \int_{x_o}^{x_1} \sum_{i=1}^{n} (F_{y_i}\psi_i \quad F_{y_i'}\psi_i')\, dx + \ldots \tag{A.74}$$

Por tanto,

$$\delta I = \varepsilon \int_{x_o}^{x_1} \sum_{i=1}^{n} (F_{y_i}\psi_i + F_{y_i'}\psi_i')\, dx \tag{A.75}$$

Para $\psi_i(x)$ arbitrario,

$$\varepsilon_i \int_{x_o}^{x_1} (F_{y_i}\psi_i + F_{y_i'}\psi_i')\, dx = 0 \qquad \forall i \;/\; i = 1,\ldots,n \tag{A.76}$$

De donde,

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0 \qquad \forall i/\ i = 1,\ldots,n \tag{A.77}$$

El sistema (A.77) es un sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden; su solución general contiene 2n constantes arbitrarias que son determinadas desde las condiciones extremas dadas en (A.71)

Utilizando la notación vector, el problema expuesto puede reescribirse como:

Determinar el extremo del funcional

$$I(Y) = \int_{x_o}^{x_1} F(x, Y, Y')\, dx \qquad (A.78)$$

donde

$$Y(x) = [y_1(x), \ldots, y_n(x)] \qquad (A.79)$$

$$Y'(x) = [y_1'(x), \ldots, y_n'(x)] \qquad (A.80)$$

y donde las funciones (A.79) y (A.80) satisfacen las condiciones extremas

$$\begin{aligned} Y(x_o) &= Y_o = [y_1(x_o) \ldots y_n(x_o)] \\ Y(x_1) &= Y_1 = [y_1(x_1) \ldots y_n(x_1)] \end{aligned} \qquad (A.81)$$

La función vectorial Y(x) será llamada contínua (con o sin esquinas) si cada componente $y_i(x)$, $\forall\ i\ /\ i = 1, \ldots, n$ es una función contínua. Asímismo, diremos que Y(x) tiene una esquina en un valor particular de x si al menos un componente de la función vector tiene una esquina en ese valor de x.

Una función vector $Y(x)$ es admisible si:

1º) es contínua (con o sin un número finito de esquinas;

2º) si satisface las condiciones extremas

$$Y(x_o) = Y_o$$

$$Y(x_1) = Y_1$$

3º) y tiene la propiedad de que para x, $x_o \leqslant x \leqslant x_1$ el punto $[x, Y(x), Y'(x)]$ descansa en algún subconjunto R del espacio Euclidiano E^{2n+1} de puntos (x, Y, Y').

Ahora, si suponemos que $F(\ldots)$ de (A.70) es una función vectorial definida sobre E^{2n+1} con $F \in C''$ entonces el problema en forma vector puede reescribirse como:

Hallar la función vector (admisible) $Y(x)$ que sea un extremo del funcional

$$I(Y) = \int_{x_o}^{x_1} F|x, Y(x), Y'(x)|dx$$

Consiguientemente, un argumento similar al seguido para el utilizado sin notación vector nos conduce a que una condición necesaria para un extremo de (A.70) es que cada $y_i(x)$ de $Y(x)$, $\forall i \;/\; i = 1, \ldots, n$, satisfaga una ecuación de Euler del tipo:

$$F_{Y_i} - \frac{d}{dx} F_{Y_i'} = 0 \ , \quad \forall i \ / \ i = 1 \ldots n$$

o bien en forma vector:

$$F_Y - \frac{d}{dx} F_{Y'} = 0$$

De la misma forma se obtendrían las expresiones en el caso de n funciones para las demás condiciones necesarias. Así:

i) Las condiciones de esquina, que se traducen en que $F_{Y'}$ sea contínua, siendo Y' una función n'-dimensional.

ii) La condición de Legendre, que se traduce en que la matriz de derivadas segundas sea semidefinida negativa si Y = Y(x) es un máximo; esto es,

$$F_{Y'Y'} \leq 0$$

iii) Para el resto de condiciones: Jacobi, Weierstrass, etc. se seguirían idénticos razonamientos (1).

---

(1) Un estudio más detallado de estas condiciones puede verse en Gelfand y Fomin (1963) op.cit., y Miller (1979), op.cit.

A.4. CONDICIONES EXTREMAS VARIABLES. EL REQUERIMIENTO DE TRANSVERSALIDAD

En los problemas variacionales planteados, la función $y(x)$ que maximizaba el funcional

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$$

había de pasar por los extremos previamente especificados

$$y(x_0) = y_0$$
$$y(x_1) = y_1$$

Estos problemas en los que las condiciones dadas por x_0, $y(x_0)$, x_1, $y(x_1)$ son fijadas de antemano, se denominan de extremos fijos.

Evidentemente el caso de extremos fijos es el más sencillo y lo normal es enfrentarnos a problemas variacionales en los cuales alguno (s) de los extremos no esté (n) previamente especificado (s). Para estos problemas, la falta de información sobre las condiciones extremas se suple con las denominadas condiciones adicionales de transversalidad.
El estudio de éstas se hará primero para funcionales simples como (A.1), pasando después al análisis de las mismas en funcionales que dependen de n funciones y de sus correspondientes derivadas primeras.

Supongamos el funcional siguiente:

$$I(y) = \int_{x_o}^{x_1} F(x,\ y,\ y')\ dx \qquad (A.82)$$

que depende, como puede observarse, de una función simple $y = y(x)$. Supondremos que en el intervalo $[x_o \ \ x_1]$ todas las funciones admisibles son contínuas sin esquinas y que los puntos extremos para los cuales está definido son variables.

Sea $z(x)$ una función admisible próxima a $y(x)$ en el sentido de la distancia entre dos curvas, siendo

$$\begin{aligned} z(x) &= y(x) + \delta y(x) = \\ &= y(x) + \varepsilon\psi(x) \end{aligned} \qquad (A.83)$$

Consiguientemente, los puntos extremos de $y(x)$ serán $(x_o\ y_o)$ y $(x_1\ y_1)$, mientras los de $z(x)$ son $(x_o+\delta x_o\ ,\ y_o+\delta y_o)$ y $(x_1+\delta x_1\ ,\ y_1+\delta y_1)$. La representación gráfica de estas funciones se encuentra en el gráfico A.1

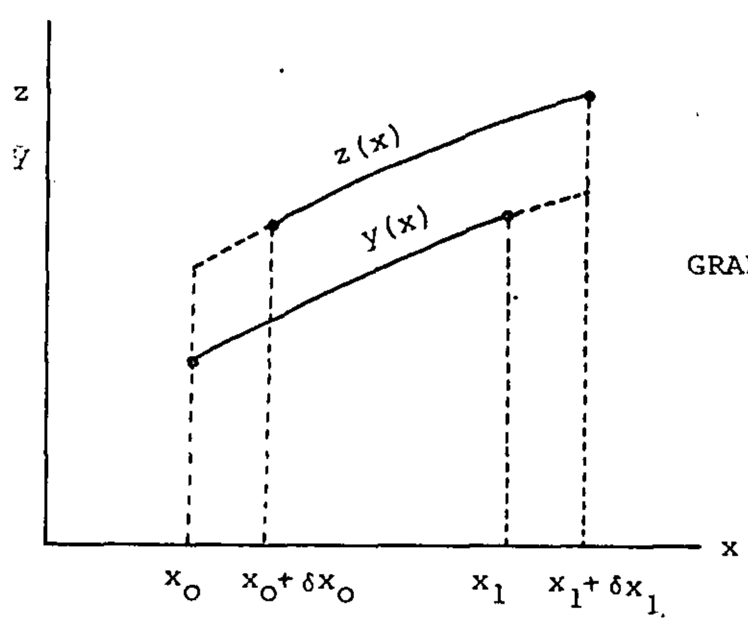


GRAFICO A.1

Los funcionales de z(x) y de y(x) serán:

$$I(z) = I(y+\delta y) = \int_{x_o}^{x_1} F(x,z,z')\, dx$$
$$I(y) = I(y) = \int_{x_o}^{x_1} F(x,y,y')\, dx \qquad (A.84)$$

Por tanto el incremento del funcional de y(x) queda:

$$\Delta I = \int_{x_o+\delta x_o}^{x_1+\delta x_1} F(x, z, z')\, dx - \int_{x_o}^{x_1} F(x, y, y')\, dx =$$
$$= \int_{x_o}^{x_1} F(x,z,z') - F(x,y,y') + \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x,z,z')\, dx -$$
$$- \int_{x_o}^{x_o+\delta x_o} F(x,z,z')\, dx \qquad (A.85)$$

Usando el desarrollo de Taylor para una aproximación de primer orden, y sustituyendo z(x) por su valor, tendremos que la primera variación será:

$$\Delta I = \varepsilon \int_{x_o}^{x_1} F_y(x,y,y')\psi + F_{y'}(x,y,y')\psi' \;\; dx$$
$$+ F(x,y,y')\Big|_{x=x_1} .\delta x_1 - F(x,y,y')\Big|_{x=x_o} . \delta x_o =$$

$$= \varepsilon \int_{x_o}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) \psi(x) dx + F \Big|_{x=x_1} \delta x_1 + \varepsilon F_{y'} \psi \Big|_{x=x_1} -$$

$$- F \Big|_{x=x_o} \delta x_o - \varepsilon F_{y'} \psi \Big|_{x=x_o} \qquad \text{(A.86)}$$

donde los términos que tienen ψ' han sido integrados por partes.

Observando la figura A.1 se desprende que las variaciones de y y x no son independientes y que, por tanto, es correcto expresar:

$$\begin{aligned} \varepsilon . \psi(x_o) &\simeq \delta y_o - y'(x_o) \delta x_o \\ \varepsilon . \psi(x_1) &\simeq \delta y_1 - y'(x_1) \delta x_1 \end{aligned} \qquad \text{(A.87)}$$

Sustituyendo estas aproximaciones en (A.86) esta expresión se convierte en:

$$\delta I = \varepsilon \int_{x_o}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) \psi(x) dx + F_{y'} \Big|_{x=x_1} \delta y_1 +$$

$$+ (F - F_{y'} y') \Big|_{x=x_1} \delta x_1 - F_{y'} \Big|_{x=x_o} \delta y_o - (F - F_{y'} y') \Big|_{x=x_o} \delta x_o$$

$$\text{(A.88)}$$

Si además y = y(x) es la función que optimiza (A.82), entonces para que la variación general del funcional (A.88) sea cero se habrán de satisfacer las condiciones:

$$\left.(F - F_{y'}y')\right|_{x=x_o} \delta x_o = 0$$

$$\left.F_{y'}\right|_{x=x_o} \delta x_o = 0 \tag{A.89}$$

$$\left.(F - F_{y'}y')\right|_{x=x_1} \delta x_1 = 0$$

$$\left.F_{y'}\right|_{x=x_1} \delta x_1 = 0 \tag{A.90}$$

Estas condiciones, denominadas condiciones de transversalidad para extremos variables, pueden expresarse en términos de la condición de ortogonalidad entre vectores, quedando:

$$\begin{bmatrix} F - F_{y'}y' \\ F_{y'} \end{bmatrix}_{x=x_o} \cdot \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}_{x=x_o} = 0 \tag{A.91}$$

$$\begin{bmatrix} F - F_{y'}y' \\ F_{y'} \end{bmatrix}_{x=x_1} \cdot \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}_{x=x_1} = 0 \tag{A.92}$$

Desde la expresión general (A.88) pueden derivarse los siguientes casos:

a) Que x_1 y x_o estén especificados pero y_1 e y_o sean libres; entonces (A.88) es equivalente a:

$$\delta I = \int_{x_o}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) \psi(x) dx + F_{y'}\Big|_{x=x_1} \delta y_1 - F_{y'}\Big|_{x=x_o} \delta y_o$$

o, lo que es lo mismo, si $y = y(x)$ es la función óptima, a las condiciones x_1 y x_o fijadas se habrá de añadir que:

$$F_{y'}\Big|_{x=x_1} \delta y_1 = 0$$

$$F_{y'}\Big|_{x=x_o} \delta y_o = 0$$

b) Si y_o e y_1 están fijados pero x_o y x_1 son libres, las condiciones adicionales serán:

$$(F - F_{y'} y')\Big|_{x=x_o} \delta x_o = 0$$

$$(F - F_{y'} y')\Big|_{x=x_1} \delta x_1 = 0$$

El estudio que acabamos de ver sobre la variación general del funcional I para el caso en que dicho funcional depende de una función simple $y(x)$ es perfectamente extensible al problema de un funcional con n funciones y_i , $\forall i \,/\, i = 1, \ldots, n$, tal que:

$$I(y_1 \ldots y_n) = \int_{x_o}^{x_1} F(x, y_1 \ldots y_n, y_1' \ldots y_n')\, dx \tag{A.93}$$

que en forma vectorial se expresa:

$$I(Y) = \int_{x_o}^{x_1} F(x, Y, Y')\, dx \tag{A.94}$$

En este caso la función $z(x)$ en forma vectorial se define

$$Z(x) = Y(x) + \delta Y(x)$$

donde $Z(x)$ es una función vectorial de n componentes $z_i(x)$ tal que

$$z_i(x) = y_i(x) + \delta y_i(x) \quad \forall i/\ i=1,\dots,n$$

Siguiendo los mismos razonamientos que para el problema simple, llegaríamos a la expresión de la variación general del funcional (A.94)

$$\delta I = \varepsilon \int_{x_o}^{x_1} (F_Y - \frac{d}{dx} F_{Y'}) \psi(x)dx + F_{Y'}\Big|_{x=x_1} \delta Y_1 + (F - F_{Y'})\Big|_{x=x_1} \delta x_1 - F_{Y'}\Big|_{x=x_o} \delta Y_o - (F - F_{Y'})\Big|_{x=x_o} \delta x_o \tag{A.95}$$

donde ε y $\psi(x)$ son vectores de n componentes cada uno.

Entonces, si $Y = Y(x)$ es un extremo del funcional (A.94), éste satisface la ecuación de Euler correspondiente :

$$F_Y - \frac{d}{dx} F_{Y'} = 0 \tag{A.96}$$

y por tanto las condiciones adicionales derivadas de la transversalidad que sirven para determinar las constantes de la ecuación de Euler pueden expresarse en términos de la ortogonalidad entre vectores:

$$\begin{bmatrix} F - F_{Y'}Y' \\ F_{Y'} \end{bmatrix}_{x=x_o} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_o \\ \delta Y_0 \end{bmatrix} = 0 \qquad (A.97)$$

$$\begin{bmatrix} F - F_{Y'}Y' \\ F_{Y'} \end{bmatrix}_{x=x_1} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta Y_1 \end{bmatrix} = 0 \qquad (A.98)$$

donde el primer vector del lado izquierdo de cada una de las dos expresiones se denomina gradiente del funcional, y suele expresarse como ∇I.

Supongamos ahora que la información sobre los puntos extremos de la función óptima es una determinada relación entre y_o y x_o, y entre y_1 y x_1, que viene expresada en los siguientes términos:

(y_o, x_o) descansa sobre una determinada función

$$y = \phi(x)$$

(y_1, x_1) termina sobre una función del tipo

$$y = \gamma(x)$$

El problema entonces puede formularse como :

- De entre las funciones contínuas (supondremos que entre x_o y x_1 la función óptima no tiene esquinas) cuyos puntos finales descansan sobre las funciones $y = \phi(x)$ e $y = \gamma(x)$,
  encontrar la función para la cual el funcional (A.82) tiene un óptimo.

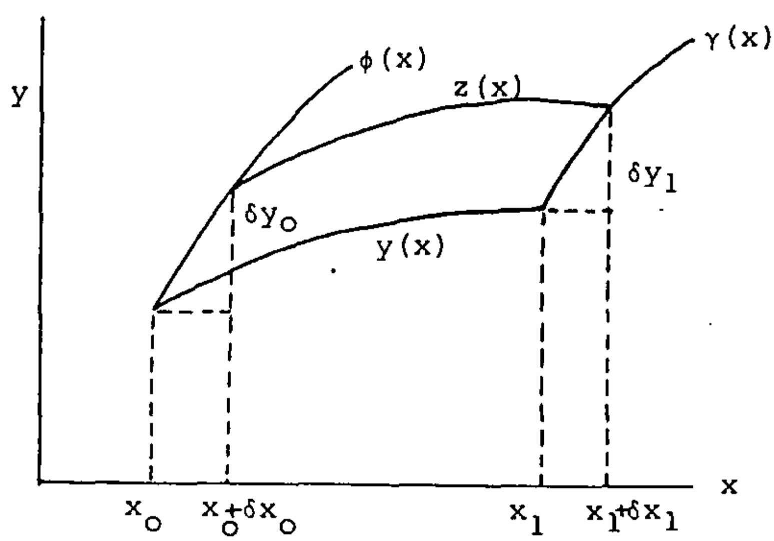
Según hemos estudiado, la variación general del funcional viene dada por la expresión (A.88). Además se sabe que si I(y) tiene un extremo en y = y(x) entonces la función y = y(x) debe satisfacer la ecuación de Euler. Por tanto, la expresión (A.88) quedará:

$$I = F_{y'}\Big|_{x=x_1}\delta y_1 \quad (F-F_{y'}y')\Big|_{x=x_1}\delta x_1 - F_{y'}\Big|_{x=x_0}\delta y_0 -$$

$$- (F - F_{y'}y')\Big|_{x=x_0}\delta x_0 \qquad \text{(A.99)}$$

Por otro lado, si y = y(x) es la función que optimiza (A.82), entonces la primera variación de I debe ser cero. Representemos gráficamente esta situación.

GRAFICO A.2



Según se observa en el Gráfico A.2, utilizando el concepto de tangente, las variaciones δy_0 y δy_1 pueden expresarse:

$$\begin{aligned} \delta y_0 &= \phi'(x).\delta x_0 \\ \delta y_1 &= \gamma'(x).\delta x_1 \end{aligned} \qquad \text{(A.100)}$$

Llevando (A.100) a (A.99), ésta puede reescribirse como:

$$I = (F_y\gamma' + F - F_{y'}y')\Big|_{x=x_1} . \delta x_1 -$$

$$- (F_{y'}\gamma' + F - F_{y'}y')\Big|_{x=x_0} . \delta x_0 = 0 \qquad (A.101)$$

Entonces, desde (A.101) se obtiene que las condiciones adicionales o de transversalidad para el caso unidimensional con extremos sobre las dos curvas $y = \phi(x)$ e $y = \gamma(x)$ será:

$$(F_{y'}\phi' + F - F_{y'}y')\Big|_{x=x_0} = 0 \qquad (A.102.a)$$

$$(F_{y'}\gamma' + F - F_{y'}y')\Big|_{x=x_1} = 0 \qquad (A.102.b)$$

Estas condiciones sirven para determinar las dos constantes arbitrarias que aparecen en la solución general de la ecuación de Euler en un problema de puntos finales variables.

Las condiciones expresadas en (A.102) pueden reescribirse en términos de vectores ortogonales del siguiente modo:

Si $y = \phi(x)$ es la curva sobre la que termina el punto $(x_0\ y_0)$ y además, según (A.102),

$$\delta y_0 - \phi'(x_0)\,\delta x_0 = 0 \qquad (A.103)$$

entonces, utilizando el criterio de ortogonalidad entre vectores,(A.102.a) la condición adicional puede expresarse:

$$\begin{bmatrix} F - F_{y'}y' \\ F_{y'} \end{bmatrix}_{x=x_0} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \end{bmatrix} = 0 \qquad (A.104)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta (A.103) llegamos a que la condición adicional en $x = x_0$ se traduce en que los vectores

$$\begin{bmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \phi'(x_0) \end{bmatrix} \qquad (A.105)$$

sean paralelos.

Por tanto, la condición (A.102.a) es equivalente a:

$$\begin{vmatrix} F - F_{y'}y' \\ F_{y'} \end{vmatrix}_{x=x_0} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ \phi'(x) \end{vmatrix}_{x=x_0} = 0 \quad (A.102.a')$$

Los mismos razonamientos se seguirían para (y_1, x_1) sobre la curva $y = \gamma(x)$.

Hasta aquí hemos tratado con funcionales de una sola función. Al intentar llevar estos desarrollos a funcionales como (A.93), tendremos que las funciones $y = \phi(x)$ e $y = \hat{\gamma}(x)$ se transforman en varie dades regulares, entendiendo por variedad la intersección de varias hipersuperficies.

Con estas consideraciones, el problema con la función vector óptima

$$Y(x) = [y_1(x) \ \dots \ y_n(x)]$$

puede formularse en los siguientes términos:

- Entre todas las funciones contínuas cuyos extremos pertenecen a dos variedades $\mathcal{M}_o$ y $\mathcal{M}_1$ (que más tarde definiremos), encontrar la función vectorial que maximiza el funcional

$$I(Y) = \int_{x_o}^{x_1} F(x, Y, Y') \, dx$$

Antes de iniciar el estudio de las condiciones de transversalidad para este caso, parece oportuno analizar algunas propiedades de lo que hemos definido como variedad regular.

Sea $f(x) = f(x_1 \ \dots \ x_n)$ alguna función escalar dada en un dominio G de un espacio euclidiano X con coordenadas ortogonales $x_1 \ \dots \ x_n$. Si la función f tiene primeras derivadas parciales en el dominio G, entonces en cada punto de G el vector

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

estará definido.

El conjunto S de todos los puntos $x = (x_1 \ldots x_n)$ que satisfacen la relación

$$f(x_1 \ldots x_n) = 0 \qquad \text{(a)}$$

se denomina hipersuperficie del espacio X, siendo (a) la ecuación de la hipersuperficie. Supondremos que el lado izquierdo de (a) tiene derivadas parciales respecto a $x_1 \ldots x_n$ y que, por tanto, hay un punto $x \in S$ que satisface la relación:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

y que se llama punto singular de la hipersuperficie S.

Otros puntos pertenecientes a la hipersuperficie, donde el gradiente de f(x) es distinto de cero, se llaman no singulares. Una hipersuperficie definida como en (a) con el lado izquierdo contínuamente diferenciable y no conteniendo puntos singulares se llama regular.

Si la ecuación (a) es lineal, esto es, tiene la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = 0 \qquad \text{(b)}$$

entonces la hipersuperficie definida por (b) recibe el nombre de hiperplano.

Sea x^o un punto de la hipersuperficie regular S definida por (a). Entonces el vector gradiente $f(x^o)$ será normal a S en el punto x^o. En el caso de un hiperplano como (b), los vectores normales son los mismos en todos los puntos; esto es, hay un único vector normal $(a_1 \ldots a_n)$. En este caso, cada hiperplano está unívocamente definido por la especificación del vector normal y un punto simple del hiperplano.

Si S es una hipersuperficie regular y x^o es un punto de S, entonces el hiperplano que pasa por x^o y tiene el vector gradiente $f(x^o)$ como su normal, se denominará hiperplano tangente a S en x^o. En otras palabras, un vector que empieza en x^o es vector tangente a S solamente cuando es ortogonal al vector gradiente $f(x^o)$.

Supongamos que lo que ahora tenemos son k hipersuperficies $S_1 \ldots S_k$ que vienen especificadas en el espacio X por las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1 \ldots x_n) &= 0 \\
f_2(x_1 \ldots x_n) &= 0 \\
&\vdots \\
f_k(x_1 \ldots x_n) &= 0
\end{aligned}
\qquad \text{(c)}
$$

La intersección de las k hipersuperficies, esto es, el conjunto de puntos $x \in X$ que satisfacen simultáneamente las ecuaciones (c) se denomina variedad M (n-k) dimensional. Se dice que M es una variedad regular si en cada punto $x \in M$ los vectores

$$\text{grad } f_1(x),\ \text{grad } f_2(x),\ \ldots,\ \text{grad } f_k(x) \qquad (d)$$

son linealmente independientes.

Si las ecuaciones (c) son lineales, M será un plano (n-k) dimensional en el espacio X.

Volviendo a las condiciones de transversalidad tendremos que si el problema es determinar la función vector óptima que terminando sobre dos variedades regulares $\mathcal{M}_o$ y $\mathcal{M}_1$ optimice el funcional (A.82), entonces, por el criterio de ortogonalidad entre vectores, las condiciones adicionales se reducirán a que:

1) El vector gradiente del funcional I en $x = x_o$ sea ortogonal a la variedad $\mathcal{M}_o$.

   Ahora bien, esta forma de expresar la transversalidad es equivalente a afirmar que el vector gradiente de I en $x = x_o$ sea una combinación lineal de las hipersuperficies P_i; esto es, la condición adicional sobre el extremo inicial puede expresarse:

$$\nabla I\Big|_{x=x_o} = \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_{k_o} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \nabla P_1 \\ \nabla P_{k_o} \end{vmatrix}_{x=x_o}$$

o bien,

$$\nabla I(x_o, Y_o, x_1, Y_1) = \sum_{i=1}^{k_o} \alpha_i \nabla P^i(x_o Y_o)$$

o

2) El vector gradiente del funcional en $x = x_1$ sea ortogonal a $\mathfrak{M}_1$ en $(x_1 \; y_1)$. Esto es,

$$\nabla I(x_o, Y_o, x_1, Y_1) = \sum_{i=1}^{k_1} \beta_i \nabla S^i(x_1 \; Y_1)$$

Además, si llamamos T_o y T_1 a los planos tangentes a $\mathfrak{M}_o$ y $\mathfrak{M}_1$ en los puntos (x_o , Y_o) y (x_1 , Y_1), entonces las condiciones de transversalidad 1) y 2) pueden reescribirse en los siguientes términos:

$$1') \quad \left[\nabla I\Big|_{x=x_o} \cdot \theta \right] = 0$$

$$2') \quad \left[\nabla I\Big|_{x=x_1} \cdot \psi \right] = 0$$

donde $\theta = (\theta_1 \; \ldots \; \theta_{k_o})$ y $\psi = (\psi_1 \; \ldots \; \psi_{k_1})$ son conjuntos de vectores linealmente independientes que pertenecen a T_o y T_1 respectivamente.

A.5. RESTRICCIONES EN EL CALCULO DE VARIACIONES

La mayoría de los problemas de optimización dinámica están sujetos a restricciones sobre las funciones que intervienen. Este hecho dió lugar a que se adaptaran las técnicas clásicas de optimización condicionada al Cálculo de Variaciones. En este sentido, en este apartado trataremos de estudiar las dos modalidades de restricción más frecuentes en los problemas variacionales, así como el problema de resolución de las mismas.

Respecto al primer punto, las restricciones más frecuentes que delimitan el conjunto de funciones admisibles pueden ser clasificadas en dos grupos:

a) El conjunto de funciones admisibles es el formado por todas las funciones que son contínuas con primeras derivadas contínuas a saltos, que, además de las condiciones de contorno, satisfacen:

$$R(x, Y, Y') = 0$$

Esta restricción puede considerarse como un sistema de ecuaciones diferenciales que debe satisfacer una función admisible $Y(x)$ en cada valor de x donde Y' existe.

Este tipo de restricciones juega un papel importan te en la moderna Teoría del Control (1).

b) Existen otras restricciones denominadas en la terminología del Cálculo de Variaciones "globales"(2) y que se incluyen en el problema de determinar la función Y(x) admisible, esto es, que satisface las condiciones de contorno además de verificar que

$$\int_{x_o}^{x_1} G(x,\ Y,\ Y')\ dx \ = \ K$$

Pasemos ahora a un estudio más detallado de cada una de las dos formas, así como del procedimiento de resolución de los problemas variacionales con estas restricciones.

---

(1) Véase en este sentido la ecuación de transición del Capítulo I.

(2) También son conocidas como isoperimétricas, calificativo que responde al problema origen de estas restricciones: determinar de entre todas las funciones de igual longitud o con el mismo perímetro la que encierra el área mayor. Un comentario más explícito sobre estas restricciones se encuentra en Gelfand y Fomin (1963), pág. 43.

Supongamos que tenemos el problema variacional:

i) Maximizar el funcional

$$I(Y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x,\ Y,\ Y')\ dx \qquad \text{(A.106)}$$

ii) con las condiciones extremas

$$\begin{aligned} Y(x_0) &= Y_0 \\ Y(x_1) &= Y_1 \end{aligned} \qquad \text{(A.107)}$$

iii) y donde la elección de la función vectorial óptima que maximiza (A.106) debe pertenecer a una determinada variedad definida por la intersección de las h hipersuperficies siguientes:

$$r^i(x,\ Y,\ Y') = 0 \quad , \forall i \ /\ i = 1 \ldots h$$

siendo $h \leq n$

o bien en forma vectorial,

$$R(x,\ Y,\ Y') = 0 \qquad \text{(A.108)}$$

Entonces el problema se centra en determinar la función vectorial $Y = Y(x)$ admisible (que al menos es contínua con un número finito de esquinas y que satisface las condiciones de contorno $Y(x_0) = Y_0$, $Y(x_1) = Y_1$) de entre todas las soluciones al conjunto de las r^i, $\forall i \ /\ i = 1 \ldots h$ que optimice el funcional (A.106).

La primera etapa en la resolución del problema es dar un conjunto de condiciones necesarias que una función que maximiza el funcional (A.106) debe satisfacer. Para ello se parte de la existencia de un conjunto de multiplicadores que no desaparece simultáneamente para cada x:

$$\Lambda(x) = |\lambda_o, \lambda_1, \ldots, \lambda_n|$$

donde λ_o es una constante no negativa que puede tomar con toda generalidad los valores 0 ó 1, y $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ son funciones contínuas que dependen de x, tal que si

$$H = \lambda_o\ F(x,Y,Y') + \sum_{i=1}^{h} \lambda_i\ \gamma^i(x,Y,Y')$$

entonces entre las esquinas de la función óptima se satisface

$$H_Y - \frac{d}{dx} H_{Y'} = 0$$

Si suponemos $\lambda_o = 1$ y llamamos $\Lambda(x)$ al vector de funciones contínuas $\lambda_1 \ldots \lambda_n$, entonces la función auxiliar se expresa como

$$H(x,Y,Y',\Lambda) = F(x,Y,Y') + \Lambda(x).R(x,Y,Y')$$

Obviamente, la incorporación de las restricciones por medio de las técnicas de Lagrange (1) transforma el problema variacional con restricciones en uno sin restricciones.

Volviendo a las condiciones necesarias, tenemos que:

- Supongamos que $Y(x)$ es una función vectorial admisible que da el óptimo global del funcional objetivo (A.106) sujeta a las restricciones (A.107) y (A.108). Entonces existe un conjunto de funciones contínuas (o a lo más con un número finito de discontinuidades) $\lambda_1(x) \ldots \lambda_n(x)$ tal que si

$$H(x,Y,Y',\Lambda) = F(x,Y,Y') + \Lambda(x).R(x,Y,Y')$$

entonces entre las esquinas de la función óptima $Y(x)$ se ha de satisfacer la ecuación de Euler:

$$H_Y - \frac{d}{dx} H_{Y'} = 0 \qquad (A.110)$$

y además en las esquinas de $Y(x)$ se ha de verificar que

$$H_{Y'} \text{ sea contínua} \qquad (A.111)$$

---

(1) Supuesto que se satisfacen las condiciones:

i) la matriz $\frac{\partial R}{\partial Y}$ tiene rango h

ii) $F \in C''$ y $R \in C''$

Por tanto, tenemos que desde la ecuación de Euler (más bien sistema de Euler, ya que $Y(x)$ es un vector de n funciones) más las h ecuaciones diferenciales de primer orden de (A.108), hay n+h ecuaciones para determinar n+h funciones $\{ y_i(x) ; \lambda_j(x)$, siendo $i = 1 \dots n$, $j = 1 \dots h \}$ que tienen 2n+h parámetros. Para determinar estos últimos, normalmente se dispone de las 2n condiciones extremas $Y(x_o) = Y_o$, $Y(x_1) = Y_1$ y las h condiciones restantes pueden darse a partir de la especificación de las λ_j $(j = 1 \dots h)$ en algún punto de x.

El problema formulado también satisface las condiciones necesarias de Weierstrass, siendo la función exceso de Weierstrass para un máximo:

$$E(x, Y, Y', Z') \leq 0 \qquad \text{(A.112)}$$

con $z(x) = y(x) + \psi(x)$

y la de Legendre, que se reduce a que

$$H_{Y'Y'} \leq 0 \qquad \text{(A.113)}$$

Por lo que a las condiciones suficientes se refiere, podemos decir que si $Y(x)$ satisface las condiciones necesarias además de verificar (A.107) y (A.108) y si $H(x, Y, Y')$, que es la función Hamiltoniana correspondiente al conjunto de multiplicadores

$\Lambda(x)$ obtenido desde las condiciones necesarias, es una función cóncava de (Y, Y') sobre algún conjunto convexo que contiene al conjunto de puntos (x, Y, Y') que satisfacen (A.108), entonces Y(x) da un máximo absoluto del funcional (A.106). Si H es convexa bajo las mismas condiciones, entonces Y(x) da un mínimo absoluto de (A.106).

Para probar el enunciado sobre la Suficiencia partimos de lo siguiente:

Sea z(x) alguna función admisible tal que

$$z(x) = y(x) + \psi(x)$$

siendo $\psi(x_o) = \psi(x_1) = 0$.

Por las propiedades de las funciones cóncavas con primeras derivadas contínuas desarrolladas en A.2.3., la suficiencia para este problema con restricciones como (A.108) se plantea en los siguientes términos:

$$H(x,Z,Z') \leq H(x,Y,Y') + H_{z'}(x,Y,Y')\psi' + H_z(x,Y,Y')\psi \qquad (A.114)$$

Dado que Z(x) es admisible y por tanto satisface las restricciones (A.108), se verificará que

$$H(x, Z, Z') = F(x, Z, Z') \qquad (A.115)$$

Por tanto, integrando la función Hamiltoniana obtenemos:

$$I(Z) \leq I(Y) + \int_{x_o}^{x_1} (H_{Z'}\psi' + H_Z\psi)\, dx \qquad (A.116)$$

Integrando por partes el segundo miembro de (A.116) y teniendo en cuenta que

$$\psi(x_o) = \psi(x_1) = 0 \qquad (A.117)$$

y que se satisfacen las condiciones necesarias de Euler y Weierstrass-Erdmann, entonces llegamos a obtener que

$$I(Z') \leq I(Y) \qquad (A.118)$$

que es lo que se deseaba alcanzar.

Por último, falta considerar para esta modalidad de restricción la situación de condiciones extremas variables. Si los extremos de la función vectorial óptima han de terminar sobre dos variedades regulares $\mathfrak{M}_o$ y $\mathfrak{M}_1$, entonces, derivado del requerimiento de transversalidad tendremos que el vector

$$\begin{bmatrix} H - H_{Y'}Y' \\ H_{Y'} \end{bmatrix}_{x=x_o} \qquad (A.119)$$

tiene que ser perpendicular a la variedad regular $\mathfrak{M}_o$ o, lo que es lo mismo, el vector (A.119) debe ser una combinación lineal de k_o vectores normales a cada punto considerado, uno para cada una de las k hipersuperficies que generan $\mathcal{M}_o$.

Si el extremo terminal ha de finalizar sobre una variedad $\mathcal{M}_1$ de dimensión k_1, tendríamos que se ha de verificar como condición adicional que el vector (A.119) particularizado en $x= x_1$ sea ortogonal a $\mathcal{M}_1$.

Por último vamos a considerar las restricciones globales. Aunque este tipo de condicionamientos no son muy frecuentes en las aplicaciones a las ciencias sociales, no obstante la aproximación a la solución de tales problemas es bastante útil a la hora de estudiar otro tipo de restricciones.

Planteemos formalmente un problema que envuelve este tipo de restricciones. Supongamos alguna función vectorial Y(x) que llamaremos admisible si satisface las condiciones fijadas:

$$Y(x_o) = Y_o \qquad Y(x_1) = Y_1 \qquad \text{(A.120)}$$

y además verifica las h restricciones siguientes:

$$\int_{x_o}^{x_1} r^i(x, Y, Y')\, dx = k_i \qquad \forall i \ / \ i = 1 \ldots h$$
$$\text{siendo } h \leq n$$

o bien, en forma vectorial,

$$\int_{x_o}^{x_1} R(x,\ Y,\ Y')\ dx = K \qquad (A.121)$$

Supongamos que se desea hallar la función admisible Y(x) (contínua con primeras derivadas contínuas excepto en un número finito de puntos) que optimiza el funcional

$$I(Y) = \int_{x_o}^{x_1} F(x,\ Y,\ Y')\ dx \qquad (A.122)$$

Para resolver el problema planteado vamos a determinar un conjunto de condiciones necesarias similares a las ecuaciones de Euler deducidas en la sección A.2.1, que habrán de satisfacerse por alguna función admisible que sea un máximo (óptimo) interior global de (A.123). En este sentido, cabe señalar que la técnica de los multiplicadores de Lagrange utilizada en el Cálculo ordinario de optimización es útil para la resolución del problema presente.

Si suponemos que Y(x) es la función vector que optimiza el funcional, sujeta a las restricciones (A.121), entonces existe un conjunto de números $(\lambda_1 \ldots \lambda_n)$ tal que si llamamos H a la función

$$H = F(x,Y,Y') + \Lambda.R(x,Y,Y') \qquad (A.123)$$

donde Λ es el vector $(\lambda_1 \ldots \lambda_n)$, entonces es necesario que entre las esquinas de la función óptima Y(x) ésta satisfaga la primera condición necesaria o ecuación (más bien, sistema) de Euler, esto es:

$$H_Y - \frac{d}{dx} H_{Y'} = 0 \qquad (A.124)$$

y además, según las condiciones de esquina de Weierstrass-Erdmann, $H_{Y'}$ es contínua a través de las esquinas de la solución Y(x).

En otras palabras, la función óptima Y(x) debe satisfacer las condiciones necesarias dadas para un extremo sin restricciones cuando el integrando del funcionaloes H en vez de F.

Por otro lado, las 2n condiciones de contorno dadas en (A.121) junto a las n ecuaciones derivadas de (A.124) servirán para determinar las 2n constantes de integración del vector $\Lambda = \lambda_1 \dots \lambda_n$.

Si en (A.124) sustituímos H por su valor dado en (A.123), tendremos:

$$\frac{\partial}{\partial Y}(F + \Lambda R) - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial}{\partial Y'}(F + \Lambda R)\right] = 0 \qquad (A.125)$$

reordenando,

$$F_Y - \frac{d}{dx} F_{Y'} + \Lambda\left(\frac{d}{dx} R_{Y'} - R_Y\right) = 0 \qquad (A.126)$$

donde el primer término es la ecuación de Euler-Lagrange en el problema de optimización sin restricciones.

Es también posible probar que bajo ciertas restricciones adicionales Y(x) debe satisfacer las condiciones necesarias de Weierstrass y Legendre basadas sobre la función de H (no F). (1).

La similitud entre la aproximación de los multiplicadores de Lagrange a los problemas de máximos o mínimos ordinarios y el procedimiento aquí introducido es obvio.

La misma técnica, introducir nuevas variables Λ y una nueva función H.

---

(1) La función H se llama función Hamiltoniana. Es similar a la función Lagrangiana de los máximos y mínimos ordinarios. No obstante, las R(...) tienen a veces distinta interpretación a la que tienen en Lagrange. Por esta razón distinguiremos H por letra distinta a L. Las cantidades $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ se llaman multiplicadores o variables conjugadas.

Un estudio completo de las diferentes cuestiones que se plantean en estos problemas se encuentra en Hadley-Kemp (1971), Cap. 3.

La resolución de este problema variacional con restricciones como (A.108) es bastante similar a la seguida en la optimización ordinaria. Formemos una función auxiliar:

$$H(x,Y,Y',\Lambda) = F(x,Y,Y') + \Lambda(x)R(x,Y,Y') \tag{A.109}$$

donde el vector de variables λ_i depende de x, ya que la restricción $R(x, Y, Y') = 0$ es impuesta para todo x tal que $x_o \leqslant x \leqslant x_1$.

El problema planteado, una vez definida la función auxiliar, es si se satisface un problema de Lagrange, y en este sentido nuestra primera etapa será determinar el conjunto de condiciones necesarias que una función $Y = Y(x)$ que optimiza el funcional $I(Y)$ debe satisfacer. Para ello se parte de la existencia de un conjunto de multiplicadores:

$$\Lambda(x) = [\lambda_1(x) \ \dots \ \lambda_h(x)]$$

tal que si la función auxiliar es:

$$H = F(x, Y, Y') + \Lambda(x).R(x, Y, Y')$$

entonces la función que optimiza (A.106) satisface las condiciones necesarias de Euler y de Weierstrass-Erdmann (si tuviera esquinas) de la sección A.2.1. cuando el integrando es H en vez de F.

ANEXO B

LA PROGRAMACION DINAMICA COMO METODO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS DE CONTROL OPTIMO

B.1.INTRODUCCION

Como resultado del fuerte desarrollo industrial del período siguiente a la Segunda Guerra Mundial, surgieron gran número de fenómenos que necesitaban del control humano mediante la toma de decisiones para dirigirlos hacia unos objetivos marcados a lo largo del tiempo.

Cuando estas decisiones de control debían tomarse en distintos puntos del tiempo dieron lugar a lo que vino a llamarse "procesos de decisión multietápicos", caracterizados porque las variables que nos describen el fenómeno están sujetas a transformaciones en el tiempo. Si el fenómeno evoluciona en función de la decisión tomada y si en cada tiempo que tengamos que realizar una decisión disponemos de "k" de éstas, estamos en condiciones de llevar el fenómeno a k estados diferentes dependiendo de la decisión tomada. Por tanto, si el número de veces que podemos tomar decisiones es n, resulta que el número de trayectorias descritas por el fenómeno es k^n; y si, asociada a cada trayectoria, existe una función de ganancia o pérdida, tendríamos que comparar los k^n valores asociados para decidir cuál sería la trayectoria óptima. Este problema así planteado resultaba bastante difícil debido a la complejidad de cálculos que implica ba obtener la decisión o control óptimo. Esta complejidad condujo a la necesidad de buscar un procedimiento que facilitase los cálculos. Esta idea partió de R. Bellman (1957), dando así lugar al conjunto de técnicas conocidas con el nombre de "Programación Dinámica".

Este nuevo método constituye junto al Principio de Máximo de Pontryagin las dos aproximaciones teóricas modernas al problema de control. No obstante, la Programación Dinámica resuelve el problema de control mediante su inclusión en una gama más amplia de problemas. Utilizando para ello el concepto fundamental de esta corriente teórica: El "Principio de Optimalidad". Una vez aplicado este Principio, el objetivo de la Programación Dinámica es obtener una relación fundamental denominada "ecuación de Bellman", cuya resolución da el resultado para el conjunto más amplio de problemas y, como caso particular, la solución al problema de control en cuestión.

El método de Bellman tiene como supuesto fundamental la diferenciabilidad de la función "criterio óptimo". Este será el supuesto que señale una de las diferencias de esta aproximación teórica respecto al Principio de Máximo.

En este Anexo dedicado a la Programación Dinámica, estudiaremos en un primer lugar los elementos de esta corriente teórica para pasar después a formular lo que se entiende por Principio de Optimalidad.

El tercer punto del Anexo será dedicado al estudio de un problema de control por el método de Programación Dinámica, primero con tiempo contínuo y después con tiempo discreto. Como se verá en este punto, el procedimiento descrito sobre un problema contínuo explica por un lado la importancia de la Programación Dinámica desde el punto de vista de controles feedback y, por otro, la ventaja de este método desde el punto de vista de soluciones numéricas.

B.2.ELEMENTOS DE LA TEORIA

Un problema de Programación Dinámica consta de los siguientes elementos:

1) La variable tiempo, que indica en qué orden concurren los sucesos en el sistema, así como los momentos en que podemos tomar las decisiones o controles, dando así lugar a los sistemas en tiempo contínuo o en tiempo discreto según la variable tiempo sea contínua o discreta.

2) Como segundo elemento están las variables de estado, esto es, el conjunto de variables que nos describen el estado del sistema, en el sentido de que si sus valores son conocidos para todo el período se puede conocer cualquier aspecto sobre la conducta del sistema.

   En los problemas de Programación Dinámica estas variables suelen representarse de forma similar a como se hace en el Principio de Máximo; así, tendremos

$$Y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))'$$

3) Un tercer elemento lo constituyen las variables de control especificadas directamente, cuya misión es influir sobre las variables de estado de alguna forma determinada.

Estas variables suelen representarse como:

$$U(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))'$$

4) Además, tendremos un sistema de ecuaciones que describe la evolución del sistema que está siendo controlado.

Este sistema, que podrá venir formulado en tiempo contínuo como

$$\dot{Y} = G(Y, U)$$

o en tiempo discreto como

$$Y(t+1) - Y(t) = G(Y, U)$$

nos describe la variación de la variable de estado como una función del estado y del control.

5) Por último, la función objetivo o, en términos de la Programación Dinámica, la función de criterio óptimo, que será una medida de la efectividad de las decisiones tomadas.

6) Como elemento adicional estarían las restricciones sobre el estado o control, que nos delimitan las regiones estado y control respectivamente. En Programación Dinámica, una restricción control muy común es

$$U(t) \in \bar{U}_p (Y(t), t)$$

que expresa que la región control $\bar{U}_p$ depende del estado del sistema y del tiempo.

Una vez estudiados los elementos estamos en condiciones de analizar lo que se denomina el Principio de Optimalidad a partir de un problema de control de características similares al formulado en el Capítulo I de este trabajo.

B.3.EL PRINCIPIO DE OPTIMALIDAD (1)

Definición.-

"Una política óptima tiene la propiedad de que cuando el estado y el control inicial son conocidos, las decisiones futuras deben constituir una política óptima con respecto al estado resultante de la primera decisión". O, en otras palabras, la conducta futura de un sistema está completamente determinada por su estado en el presente. En este sentido, el Principio de Optimalidad reduce los problemas de decisión multietápicos a varios problemas de decisión unietápicos, donde cada uno de los cuales debe ser resuelto en función del estado como parámetro; y la elaboración de la solución óptima va desde las etapas finales hasta el comienzo, debido a que cada segmento final de la trayectoria óptima es también óptimo.

Una vez definido lo que entendemos por Principio de Optimalidad vamos a pasar a plantear un problema de Programación Dinámica en tiempo contínuo y determinístico (2).

---

(1) Existen numerosas definiciones sobre este Principio; no obstante, nosotros utilizamos la dada por Bellman y Kabala (1965), pág. 35.

(2) Como trabajo representativo de Programación Dinámica estocástica se encuentra el artículo de Simon (1956).

Consideremos el siguiente problema de control (1)

i) Dado el sistema dinámico

$$\dot{Y} = G(Y, U) \qquad (B.1)$$

donde U(t) es una decisión o control e Y(t) es el estado.

ii) Las condiciones extremas vienen explicitadas por:

$$Y(t_o) = Y_o \qquad (B.2)$$

siendo t_o y t_1 fijados, pero $Y(t_1)$ libre.

iii) Se requiere maximizar el funcional

$$I(Y, U) = \int_{t_o}^{t_1} F(Y,U)\ dt + Q\left[Y(t_1)\right] \qquad (B.3)$$

Supongamos que para el problema de control planteado la trayectoria de estado óptima es $Y^*(t)$ para el período considerado $[t_o , t_1]$. Consideremos ahora un punto intermedio de dicha trayectoria, $Y(t_m)$, que no es más que el estado correspondiente a un tiempo $t = t_m$, de forma que $t_o \leqslant t_m \leqslant t_1$.

---

(1) Un planteamiento similar se puede encontrar en Feld'baum (1975).

A la parte de la trayectoria estado óptima que va desde Y_o a Y_m la llamaremos primer segmento o primera sección, y a la que va desde Y_m a Y_1, segundo segmento o segunda sección.

El segundo segmento de esa trayectoria óptima equivale a una parte del funcional óptimo que corresponde a la integral

$$\int_{t_m}^{t_1} \dot{F}(Y,U)\, dt + Q(Y_1)$$

Esta subtrayectoria puede considerarse como una trayectoria independiente que será óptima si la integral correspondiente es máxima. Ahora bien, según el Principio de Optimalidad esta sección de la trayectoria óptima debe representar en sí misma una trayectoria óptima respecto a la condición inicial $Y(t_m) = Y_m$. Esto significa que si el estado inicial es Y_m en t_m, entonces, independientemente de cómo el sistema alcance este estado, la subtrayectoria segunda es óptima (1).

El Principio de Optimalidad formulado es, en términos del enfoque de la Programación Dinámica, una condición necesaria general para un proceso óptimo, que es válido para sistemas tanto discretos como continuos.

---

(1) Esta afirmación es demostrada por "reducción al absurdo en Fel'dbaum , op. cit.

B.4.LA PROGRAMACION DINAMICA APLICADA A SISTEMAS DISCRETOS

En numerosos problemas el tiempo aparece como una variable discreta en lugar de ser contínua, y dichos problemas tienen una importancia singular en la Programación Dinámica debido fundamentalmente a la carencia de restricciones sobre las funciones que intervienen.

Supongamos que el tiempo inicial t_o es cero y dividamos el intervalo temporal $[0, t_1]$ en N subintervalos de longitud Δ. Por tanto, consideraremos solamente valores discretos del estado $Y = Y(K)$ y del control $U = U(K)$, para $K = 0, 1, \ldots, N$ en los instantes $t = 0, 1.\Delta, 2.\Delta, \ldots, (N-1).\Delta, N.\Delta = t_1$.

A la vista de estas transformaciones, la ecuación diferencial (B.1) puede ser sustituída por la ecuación en diferencias:

$$\frac{Y(K+1) - Y(K)}{\Delta} = G[Y(K), U(K)] \qquad (B.4)$$

o bien,

$$Y(K+1) - Y(K) = G_1[Y(K), U(K)] \qquad (B.5)$$

siendo

$$G_1 = G . \Delta \qquad (B.6)$$

El estado en el tiempo inicial viene dado en forma vectorial por:

$$Y(0) = Y_o \qquad (B.7)$$

Una vez expuestos los elementos, podemos pasar al objetivo, a maximizar una función que para el caso discreto toma la forma

$$^{o}I(Y,U) = \sum_{K=0}^{N-1} \Big[F\big[Y(K),U(K)\big]\Big] + Q\big[Y(N)\big] \quad (B.8)$$

Esa función objetivo, que tiene la forma del problema de Bolza, debe optimizarse eligiendo una sucesión de valores discretos de la variable de control "U":

$$U(0),\ U(1),\ \ldots,\ U(N-1) \qquad (B.9)$$

pertenecientes al conjunto de controles admisibles $\bar{U}_p$ dado (en este caso, igual al espacio control R^m, ya que no existen restricciones sobre las variables de control).

Por tanto, se requiere encontrar el óptimo (máximo o mínimo) de una función compleja de varias variables. Pero la Programación Dinámica da la posibilidad de reducir esta operación a una secuencia de funciones maximizadas de una variable simple. El método seguido será desde el final al principio. En este sentido, el subproblema más simple es el que empieza en K = N, con Y(N) especificado. En este caso, el punto inicial es el terminal. Ningún control puede seleccionarse y la función de optimalidad es

$V[Y(N), N] = Q[Y(N)]$. (Con el nombre de función de optimalidad en Programación Dinámica se expresa el valor óptimo del funcional objetivo para el estado y tiempo correspondiente).

Supongamos que estamos en el instante $(N-1)\Delta$ y que todos los valores de la variable control anteriores, es decir, U(0), U(1), ..., U(N-2) han sido realizados de alguna manera, y además el vector estado Y(N-1) correspondiente al instante $(N-1)\Delta$ ha sido obtenido.

Según el Principio de optimalidad, la decisión U(N-1) no depende de los acontecimientos pasados del sistema, sino que está determinada solamente por el estado Y(N-1) y el control propuesto.

Consideremos la última parte de la trayectoria, es decir, la sección que va desde el instante $t = (N-1)\Delta$ a $t = N.\Delta$. El valor U(N-1) sólo influye en el último término del sumatorio de la función objetivo, que podemos denominar I_{N-1} , siendo

$$I_{N-1} = F[Y(N-1), U(N-1)] + Q[Y(N)] \qquad (B.10)$$

Del sistema de ecuaciones de movimiento sabemos que:

$$Y(N) = G_1[Y(N-1), U(N-1)] + Y(N-1) \qquad (B.11)$$

donde $G_1 = G.\Delta$

y que por tanto el estado Y(N) sólo depende del control U(N-1). Por tanto, nuestra tarea es encontrar el control admisible U(N-1) que optimice la función I_{N-1}. Supongamos que V_{N-1} es el valor máximo de I_{N-1} que, como se desprende del análisis anterior, sólo depende del estado Y(N-1).

Por tanto,

$$V_{N-1} = V_{N-1}\left[Y(N-1)\right] \tag{B.12}$$

y su valor equivale a

$$\begin{aligned} V_{N-1}\left[Y(N-1)\right] &= \underset{\{U(N-1)\,\in\,\overline{U}_p\}}{\text{máx.}}\ I_{N-1} = \\ &= \underset{\{U(N-1)\,\in\,\overline{U}_p\}}{\text{máx.}} \Big[F\left[Y(N-1),U(N-1)\right]+Q\left[Y(N)\right]\Big] = \\ &= \underset{\{U(N-1)\,\in\,\overline{U}_p\}}{\text{máx.}} \Big[F\left[Y(N-1),U(N-1)\right] + Q\{G\left[Y(N-1),\ U(N-1)\right]\}\Big] \end{aligned} \tag{B.13}$$

Como la maximización de I_{N-1} o, lo que es lo mismo, la determinación de V_{N-1} sólo se hace respecto a U(N-1), tendremos que V_{N-1} será una función de Y(N-1).

Una vez vista la última parte de la trayectoria óptima, podemos pasar a considerar la última y la penúltima juntas. En este caso, la elección de las funciones U(N-2) y U(N-1) aparece solamente en los úl timos términos del sumatorio de la función objetivo, formando la expresión:

$$I_{N-2} = F[Y(N-2),U(N-2)] + F[Y(N-1),U(N-1)] + Q[Y(N)] \qquad (B.14)$$

considerando como dado Y(N-2) en el instante inicial de la penúltima sección.

Hallemos el valor de V_{N-2}, que es el máximo de I_{N-2} con respecto a U(N-2) y U(N-1). Pero el máximo con respecto a U(N-1) del término entre paréntesis de la última expresión fué hallado en el paso anterior para cada valor de Y(N-1) y el posterior depende de U(N-2). Además, en la maximización de I_{N-1} el valor óptimo correspondiente de U(N-1) fué hallado, y lo denotaremos por $U^{*}(N-1)$.

Si consideramos también el hecho de que el primer término de la última expresión no depende de U(N-2), entonces tendremos que:

$$V_{N-2}[Y(N-2)] = \max_{\substack{U(N-2)\in \overline{U}_p \\ U(N-1)\in \overline{U}_p}} I_{N-2} =$$

$$= \max_{U(N-2)\in \overline{U}_p} \Big[F[Y(N-2),U(N-2)] + V_{N-1}[Y(N-1)]\Big] =$$

$$= \max_{U(N-2)\in \overline{U}_p} \Big[F[Y(N-2),U(N-2)] + V_{N-1}\big[G|Y(N-2),U(N-2)]\big]\Big] \qquad (B.15)$$

ya que desde el sistema de ecuaciones dinámicas sabemos que

$$Y(N-1) = G_1\left[Y(N-2), U(N-2)\right] + Y(N-2) \qquad (B.16)$$

En esta etapa la maximización es hecha con respecto a $U(N-2)$ y por tanto tenemos $U^*(N-2)$, valor óptimo de $U(N-2)$, e V_{N-2}. Y que, consiguientemente, $U^*(N-2)$ e V_{N-2} son funciones de $Y(N-2)$.

Se observa que el valor óptimo de la variable decisión $U^*(N-2)$ que se ha determinado maximiza la expresión entera (B.15) y no sólo el primer sumando.

El procedimiento descrito de movimiento desde el final al principio del período considerado $(0, t_1)$ puede ser continuado para subtrayectorias sucesivas. Así, para la antepenúltima tendremos que:

$$I_{N-3} = F\left[Y(N-3), U(N-3)\right] + F\left[Y(N-2), U(N-2)\right] + F\left[Y(N-1), U(N-1)\right] + Q\left[Y(N)\right] \qquad (B.17)$$

Si según el sistema (B.4) de ecuaciones de transición se sigue que

$$Y(N-2) = G_1\left[Y(N-3), U(N-3)\right] + Y(N-3) \qquad (B.18)$$

entonces el funcional (B.17) será una función del estado $Y(N-3)$. Consiguientemente, el máximo de (B.17), que representamos por V_{N-3}, responderá a la forma:

$$V_{N-3}[Y(N-3)] = \underset{U(N-3) \in \bar{U}_p}{\text{máx.}} F[Y(N-3),U(N-3)] + V_{N-2}[Y(N-2)]$$

$$= \underset{U(N-3) \in \bar{U}_p}{\text{máx.}} F[Y(N-3),U(N-3)] + V_{N-2}\Big[G[Y(N-3),U(N-3)]\Big] \quad (B.19)$$

Si seguimos el mismo procedimiento para determinar V_{N-4}, V_{N-5}, ..., podremos llegar a derivar una fórmula de recurrencia fundamental tal que:

$$V_{N-K}[Y(N-K)] = \underset{U(N-K) \in \bar{U}_p}{\text{máx.}} F[Y(N-K),U(N-K)] + V_{N-K+1}\Big[G[Y(N-K),U(N-K)]\Big] \quad (B.20)$$

Por tanto, el proceso de maximización en (B.20) nos determina el control óptimo correspondiente a $U^{*}(N-K)$, que será una función del estado en esa etapa $Y(N-K)$, esto es,

$$U^{*}(N-K) = U^{*}[Y(N-K)] \quad (B.21)$$

Como puede observarse por (B.21), el control óptimo que nos determina la Programación Dinámica viene expresado en forma feedback. Esto es, como más tarde veremos, una ventaja importante de este método de solución de problemas de optimización dinámica.

Una vez determinada la relación de recurrencia fundamental (B.20) se puede, por computación, dando valores al tiempo K, K = 1, ..., N, llegar a determinar el control óptimo en el tiempo inicial, $U^{*}(0)$. Paralelamente se determinaría la función óptima V_0 .

A la vista de los resultados alcanzados hasta este momento, podemos derivar que un problema de optimización de etapa múltiple queda reducido mediante las técnicas de Programación Dinámica a una sucesión de problemas de optimización de una sola etapa. Si las técnicas se han aplicado a un problema autónomo y se han derivado los resultados comentados, es preciso adelantar que las conclusiones no variarán si el problema en cuestión es no autónomo. (1)

Por lo que se refiere al método de optimización seguido: la Programación Dinámica, podemos hacer los siguientes comentarios:

El problema de maximizar el funcional en tiempo discreto (B.8) puede ser considerado a primera vista como el ejercicio de maximizar una función de los N vectores U(0), ..., U(N-1). Ahora bien, a la hora

---

(1) Véase "Programación Dinámica en sistemas no autónomos". Fel'dbam (1965) y Bellman (1957).

de llevar este proceso de maximización al terreno práctico hemos de, como paso previo, expresar cada estado Y(K) como función de todas las decisiones U(0), U(1), ... U(N-1) y de las condiciones iniciales, después de utilizar

$$Y(K+1) = Y(K) + G_1\left[Y(K),\ U(K)\right]$$

Como resultado de cada sustitución en (B.8), esta expresión se transformará en otra bastante más complicada y, salvo en casos excepcionales, no tendrá solución el método directo de maximización.

Por su parte, la Programación Dinámica permite la maximización de una función compleja de gran número de variables mediante la transformación en una secuencia de maximizaciones. Determinando en cada secuencia el máximo de una función más sencilla de una o varias variables. Por tanto, en una primera impresión, podemos concluir que la Programación Dinámica constituye un método eficiente en la resolución de determinados problemas que el método directo como tal sería incapaz de solventar. No obstante, ésto no puede interpretarse como que el método directo no resuelva determinados problemas, sobre todo los de pocas variables.

Del mismo modo, es preciso resaltar que ésto tampoco ha de conducirnos a pensar en la Programación Dinámica como la panacea de los métodos de optimización. En este sentido parece conveniente señalar algunos inconvenientes de este procedimiento. En efecto, en cada etapa de los cálculos es necesario encontrar y almacenar las funciones $V_{N-K}(Y)$ e $V_{N-K+1}(Y)$ (por ejemplo, en el caso general dos funciones de n variables). El almacenamiento de tales funciones para valores grandes de n requiere una inmensa memoria y para casos complicados es sólo practicable con la ayuda de algunas aproximaciones.

B.5. SISTEMAS CONTINUOS: LA ECUACION DE BELLMAN (1)

Bajo ciertos supuestos adicionales, la Programación Dinámica puede ser aplicada a problemas formulados en tiempo contínuo. En este sentido vamos a dedicar esta sección al desarrollo del método de la Programación Dinámica a este tipo de problemas.

Seguiremos manteniendo el mismo problema de control formulado en la sección del Principio de Optimalidad. En dicho problema la variable tiempo era definida en términos contínuos, el vector estado $Y(t)$ era un vector n'dimensional, y el vector control m' dimensional. Las condiciones extremas venían dadas por $Y(t_o) = Y_o$, con t_1 constante.

Suponiendo que hemos determinado la trayectoria óptima $Y^*(t)$ que va desde $Y(t_o)$ a $Y(t_1)$ denotemos por $V(Y(t_o), t_o)$ (2) al valor óptimo del funcional

---

(1) Como ejemplo significativo de un proceso de decisión multietápico contínuo, Bellman utiliza lo que en el Anexo A denominamos "Problema más simple del Cálculo de Variaciones".

(2) Nótese que I indica un funcional mientras V es una función de los n+1 parámetros $y_1, \ldots, y_n, t$.

$I(Y, U)$ para el problema formulado. La función $V(Y_o, t_o)$ es el máximo valor alcanzable del funcional objetivo $I(Y, t)$ que se puede obtener empezando en el tiempo t_o con el estado correspondiente Y_o.

Según el Principio de Optimalidad, la parte de la trayectoria óptima $Y^*(t)$ que va desde $Y(t)$, siendo $t > t_o$, a $Y(t_1)$, siendo t_1 el tiempo final, es también una trayectoria óptima, con $V[Y(t), t]$ como el máximo valor del funcional objetivo (1).

Consideremos ahora un pequeño incremento temporal (δt) que conducirá pues a una nueva función óptima:

$$V[Y(t+\delta t), t+\delta t] = V(Y_m, t_m)$$

correspondiente a la parte de la trayectoria óptima que va desde $Y(t+\delta t) = Y_m$ a $Y(t_1) = Y_1$, y desde $t+\delta t = t_m$ a t_1.

La relación entre el funcional óptimo que empieza en el estado Y en el tiempo t $(V(Y,t))$ e $V(Y_m, t_m)$ es análoga a la del caso discreto general con $V(Y, t)$ en vez de $V_{N-K}[Y(N-K)]$ e $V(Y_m, t_m)$ en

---

(1) Este es el método utilizado por Dafman en la primera parte de su trabajo. Véase Sección 3.2.

vez de $V_{N-K}[Y(N-K+1)]$ y finalmente $F[Y(t), U(t)]\delta t$ en vez de $F[Y(N-K), U(N-K)]$. Por tanto,

$$V(Y,t) = \underset{U(t)}{\text{máx.}}\ F(Y,U)\delta t + V(Y_m,t_m) + \theta_1 . \delta t \qquad \text{(B.22)}$$

$$\text{donde} \quad \lim_{t \to 0} \theta_1 . \frac{(\delta t)}{\delta t} = 0$$

que expresa cómo sobre el intervalo temporal $(t+\delta t)$ el único incremento que podría recibir la función óptima viene del integrando $F(Y, U).\delta t$.

Un supuesto importante de la Programación Dinámica para los sistemas contínuos es que el óptimo del funcional $V(t,Y)$ sea contínuamente diferenciable con respecto a las n variables de estado y al tiempo.

Según este supuesto, podemos desarrollar una serie de Taylor para representar $V(Y_m, t_m)$ en la proximidad del punto (Y, t).

$$V(Y_m,t_m) = V[Y(t+\delta t), t+\delta t] =$$

$$= \text{(utilizando el desarrollo de (1))}$$

---

(1) $Y_m = Y(t+\delta t) = Y(t_m)$ depende de $U(t)$ y, para pequeños incrementos de t:

$$Y_m = Y(t+\delta t) = Y(t) + \frac{dY}{dt}\delta t + \theta_2(\delta t) =$$

$$= Y(t) + G(Y, U)\delta t + \theta_2(\delta t)$$

donde $\theta_2(\delta t)$ es pequeño de orden superior a δt.

$$V(Y_m,t_m) = V[Y(t) + G(Y,U)\delta t + \theta_2(\delta t), \ t+\delta t] =$$

$$= V(Y,t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\, V(Y,t)}{\partial Y_i} g_i(Y,t).\delta t$$

$$+ \frac{\partial\, V(Y,t)}{\partial t}\delta t + \theta_3(\delta t) \qquad (B.23)$$

donde $\theta_3(\delta t)$ es pequeño de orden superior a δt.

Como la derivada parcial de $V(t,Y)$ respecto al vector estado es el gradiente de $V(t,Y)$, la expresión anterior podemos reescribirla de la siguiente forma:

$$V(Y_m,t_m) = V(Y,t) + \frac{\partial V}{\partial Y}(Y,t).\ G(Y,U).\delta t$$

$$+ \frac{\partial\, V(Y,t)}{\partial t}\delta t + \theta_3(\delta t) \qquad (B.24)$$

Sustituyendo esta fórmula en (B.22), tendremos:

$$V(Y,t) = \max_{\{U(t)\}}.\ F(Y,U)\delta t + V(Y,t) +$$

$$\frac{\partial V}{\partial Y}(Y,t).G(Y,U).\delta t + \frac{\partial V\ (Y,t)}{\partial t}\delta t + \theta_3.\delta t$$

$$(B.25)$$

Esta expresión puede simplificarse eliminando $V(Y,t)$ de ambos lados, y llegamos a que:

$$0 = \max_{\{U(t)\}}.\ F(Y,U)\delta t + \frac{\partial V}{\partial Y}(Y,t).G(Y,U).\delta t +$$

$$\frac{\partial\, V(Y,t)}{\partial t}\delta t + \theta_3(\delta t) \qquad (B.26)$$

donde, dividiendo por δt y tomando el límite cuando $\delta t \rightarrow 0$, obtenemos la denominada ecuación de Bellman:

$$- \frac{\partial V\ (Y,t)}{\partial t} = \underset{\{U(t)\}}{\text{máx.}} \left[F(Y,U) + \frac{\partial \partial}{\partial Y} V(Y,t) . G(Y,U) \right] \tag{B.27}$$

Esta expresión llamada ecuación de Bellman, o relación de recurrencia fundamental, no es más que una ecuación diferencial parcial singular ya que, como resultado de la maximización, la variable control desaparece del lado derecho de la expresión para instantes temporales arbitrarios. (1).

Al resolver la ecuación, se obtendrá la función de actuación óptima, y la solución del problema de control se hallaría como solución particular para las condiciones iniciales especificadas.

---

(1) Donde $U^{*}(t)$ es el control que maximiza el lado derecho de la ecuación de Bellman

$$H(Y, \frac{\partial V}{\partial Y}) = F(Y,U^{*}) + \frac{\partial V}{\partial Y}.G(Y,U^{*})$$

siendo la ecuación en derivadas parciales resultante

$$H(Y, \frac{\partial V}{\partial Y}) + \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

la ecuación Hamilton-Jacobi.

Es a veces posible resolver esta ecuación de forma analítica; si así fuera, ésto da la solución completa a la amplia familia de problemas de control óptimo definidos por el sistema, por las restricciones y el objetivo. En muchas situaciones, sin embargo, ésta debe resolverse numéricamente.

B.6. LA PROGRAMACION DINAMICA Y EL CALCULO DE VARIACIONES

La metodología subyacente al Cálculo de Variaciones clásico no ofrece en general procedimientos numéricos eficientes. Aún en el caso más sencillo, en el que sólo hay una función a determinar Y(t), es a menudo difícil resolver numéricamente la ecuación de Euler.

El problema de la Programación Dinámica es más general que el problema del Cálculo de Variaciones clásico. Por tanto, la condición necesaria de la Programación Dinámica: la ecuación de Bellman, implicará las condiciones necesarias del Cálculo de Variacions. En este sentido, parece oportuno comenzar esta sección con un problema de Programación Dinámica muy sencillo que nos permita derivar las condiciones del cálculo de variaciones clásico.

El problema del cálculo de variaciones clásico se puede considerar como un caso especial del problema de la Programación Dinámica donde la tasa de variación instantánea de las variables de estado son las variables de control, esto es:

$$\dot{Y} = U \tag{B.28}$$

Según este supuesto, la ecuación de Bellman se convierte en (1):

$$-\frac{\partial V(Y,t)}{\partial t} = \underset{\{\dot{Y}\}}{\text{máx.}}\left[F(Y, \dot{Y}) + \frac{\partial V}{\partial Y}\dot{Y}\right] \qquad (B.29)$$

La obtención del máximo de la expresión entre corchetes exige como condición necesaria que la parcial de la misma respecto a la tasa de variación de las variables de estado sea cero, esto es:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{Y}} F(Y, \dot{Y}) + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \qquad (B.30)$$

o, lo que es lo mismo, dado que $\frac{\partial V}{\partial Y}$ es independiente de $\dot{Y}$, entonces,

$$\frac{\partial F(Y, \dot{Y})}{\partial \dot{Y}} = -\frac{\partial V}{\partial Y} \qquad (B.31)$$

Hallando la derivada total respecto al tiempo de la última expresión:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{Y}} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial V}{\partial t \partial Y} - (\dot{Y})'\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \qquad (B.32)$$

en donde se ha tenido en cuenta que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial Y} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial Y_1} \cdots\cdots \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial Y_n}\right)$$

(1) Con V, en el Cálculo de Variaciones se expresa el funcional objetivo evaluado en los valores óptimos de sus argumentos.

y que:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial Y_1^2} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial Y_1 \partial Y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial Y_n \partial Y_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial Y_n^2} \end{bmatrix}$$

Pero, si observamos el miembro del lado derecho, vemos que es idéntico al correspondiente de la ecuación de Bellman derivando respecto a Y; luego,

$$-\frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial Y} + (\dot{Y})'. \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \qquad (B.33)$$

Reordenando los términos y despejando $\frac{\partial F}{\partial Y}$ nos queda:

$$-\frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial V}{\partial t} - (\dot{Y})'. \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} = \frac{\partial F}{\partial Y} \qquad (B.34)$$

Ahora bien, desde la expresión (B.32) se sigue que el primer término de (B.34) es igual al correspondiente de (B.32) y, por tanto, haciendo el cambio correspondiente se obtiene la ecuación de Euler del Cálculo de Variaciones:

$$\frac{\partial F}{\partial Y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{Y}} = 0 \qquad (B.35)$$

Por lo que se refiere al resto de condiciones necesarias tendremos:

La ecuación de Bellman: Se plantea como un problema de maximización; la ecuación de Euler se ha derivado como la condición de primer orden, esto es, de igualar la derivada respecto a $\dot{Y}$ a cero. El problema de máximo exige como condición de segundo orden que la derivada segunda sea menor o igual a cero. Esta condición suficiente ó de segundo orden nos permite obtener la condición de Legendre del Cálculo de Variaciones desde la ecuación de Bellman.

La condición de Legendre se obtiene inmediatamente de las condiciones necesarias de segundo orden para la maximización anterior; basta con volver a derivar respecto a $\dot{Y}$ en la condición de primer orden; así:

$$\frac{\partial^2}{\partial \dot{Y}^2} \left[F(Y, \dot{Y}) + \frac{\partial V}{\partial Y} \cdot \dot{Y} \right] \qquad (B.36)$$

Esta expresión ha de ser semidefinida o definida negativa, dado que estamos en un problema de maximización. Esta condición puede simplificarse, ya que $\frac{\partial V}{\partial \dot{Y}^2}$ es independiente de $\dot{Y}$, luego la condición de Legendre se reduce a que:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{Y}^2} < 0 \qquad (B.37)$$

para un máximo.

La tercera condición necesaria, la de Weierstrass, se deriva asímismo de la maximización de la ecuación de Bellman, implicando que si $\dot{Y}$ es una solución, entonces se tiene que cumplir que:

$$F(Y, \dot{Y}) + \frac{\partial V}{\partial Y} . \dot{Y} \geqslant F(Y, \dot{Z}) + \frac{\partial V}{\partial Y} . \dot{Z} \qquad (B.38)$$

para cualquier vector de estado $\dot{Z}$ perteneciente al conjunto de estados admisibles.

Para demostrar la expresión anterior, agrupamos términos:

$$F(Y, \dot{Z}) - F(Y, \dot{Y}) + \frac{\partial V}{\partial Y}(Y,\dot{Y})(\dot{Z}-\dot{Y}) \leqslant 0 \qquad (B.39)$$

Dado que de la primera condición necesaria se sabe que:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{Y}} = - \frac{\partial V}{\partial Y} \qquad (B.40)$$

la condición de Weierstrass quedará como:

$$F(Y,\dot{Z}) - F(Y,\dot{Y}) - \frac{\partial F}{\partial \dot{Y}} (Y,\dot{Y}) \; (\dot{Z}-\dot{Y}) \leqslant 0 \qquad (B.41)$$

Es decir, para un máximo, la condición de Weierstrass exige que la última expresión (B.41) (denominada función exceso de Weierstrass E) sea menor o igual a cero.

La cuarta condición necesaria, la de esquina de Weierstrass-Erdmann, se puede derivar de la condición de primer orden y de

$$I - \frac{\partial F}{\partial \dot{Y}} \dot{Y} = I + \frac{\partial V}{\partial Y} \dot{Y} = - \frac{\partial V}{\partial t} \qquad \text{(B.42)}$$

Dado que

$$\frac{\partial V}{\partial Y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial V}{\partial t}$$

son contínuas, tendremos que

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{Y}} \quad \text{y} \quad I - \frac{\partial F}{\partial \dot{Y}} \cdot \dot{Y}$$

son contínuas a través de las esquinas, que es lo que exigen las condiciones de esquina de Weierstrass-Erdmann.

Como se ha podido observar, las condiciones necesarias del Cálculo de Variaciones son derivadas de la ecuación de Bellman sin más que aplicar a esta última el criterio de optimización.

La Programación Dinámica también puede utilizarse para tratar los problemas del Cálculo de Variaciones con restricciones. Así, si tenemos el problema variacional clásico con la restricción isoperimétrica:

$$\int_{t_o}^{t_1} G(Y, \dot{Y}, t) = K$$

En términos de la Programación Dinámica, la ecuación de Bellman se transforma en:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \underset{\{\dot{Y}\}}{\text{máx.}} \left[F(Y,\dot{Y},t) + \frac{\partial V}{\partial Y}\dot{Y} + \frac{\partial V}{\partial K} G(Y,\dot{Y},t) \right]$$

que ofrece las mismas condiciones que la formulación en términos del Cálculo de Variaciones, ya que el multiplicador de Lagrange es:

$$\Lambda = \frac{\partial V}{\partial K}$$

En general, de la misma forma que se explicó para el Principio de Máximo, las derivadas parciales de la función de actuación óptima pueden interpretarse como multiplicadores de Lagrange que miden la sensibilidad de la solución a cambios en las restricciones.

BIBLIOGRAFIA

ALLEN, R.G.(1938): "Mathematical Analysis for Economist". McMillan, Londres.

AOKY, M. (1976): "Dynamic Economics: A System theoric Approach to Theory and control". New York and Amsterdam, North-Holland.

AOKY, M. y CANZONERI, M.(1979): "Sufficient Conditions for Control of Target Variables and Assignement of Instruments in Dynamic Macroeconomic Models". International Economic Review, vol. 20, nº 3, octubre.

ARROW, K.J.(1968): "Applications of Control Theory to Economic Growth". Mathematics of the Decision Sciences, vol. 2. American Mathematical Society.

ARROW, K.J. y KURZ, M.(1970): "Public Investment, the Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy. The Johns Hopkins Press, Baltimore, Maryland.

ATHANS, M. y CHOW, G.C.(1972): "Introduction to Stochastic Control Theory and Economic Systems" Annals of Economics and Social Measurement, vol. 1, nº 4.

ATHANS, M. y FALB, F.L.(1966): "Optimal Control". Ed. McGraw-Hill.

BALAKRISHNAM, A.V.(1972-1): "Techniques of Optimization". Academic Press, New York and London.

BALAKRISHNAM, A.V.(1972-2): "Stochastis Control: A function space Approach". SIAM Journal of Control, 10, No. 2.

BELLMAN, R.(1957): "Dynamic Programming". Princeton University Press.

BELLMAN, R.(1971): "Introduction to the Mathematical Theory of Control Process". Vol.2. Academic Press.

BELLMAN, R. y DREYFUS, S.(1962): "Applied Dynamic Programming". Princeton University Press.

BELLMAN, R. y KALABA, R.(1965): "Dynamic Programming and Modern Control Theory". Academic Press. New York and London.

BENAVIE, A.(1973): "Técnicas Matemáticas del Análisis Económico". Ed. Prentice/Hall.

BENSOUSSAN, A., GERALD, E. y NASLUND, B.(1974): "Management Applications of Modern Control Theory". North-Holland Publishing Co.

BERKOVITZ, L.D.(1961): "Variational methods in Problem of Control and Programming". Journal Mat. Anal. Applic., vol. 3.

BERKOVITZ, L.D.(1962): "On Control Problem with Bounded State Variables". Journal Mathematical Anal. Applic., vol. 5.

BERTRAND, T.J.(1979): "Shadow Pricing in Disterted Economics". American Economic Review, diciembre.

BILAS, R.(1967): "Microeconomic theory: A graphical analysis". New York, Mc.Graw-Hill.

BLISS, G.A.(1946): "Lectures on the Calculus of Variations". Chicago University Press.

BOSE, J.(1968): "Optimal Growth and Investment allocation". Review of Economic Studies, nº 104, octubre.

BRYSON, A.E.(1969):"Applied Optimal Control". Blaisdell: Waltham. Massachussets.

CHAVAKARTY, M.(1968): "Optimal Growth and Rate of Change in Consumption". American Economic Review, diciembre.

CHOW, G.C.(1970): "Optimal Stochastic Control of Linear Economic Systems". Journal of Money, Credit, Banking. Agosto.

CHOW, G.C.(1972-1): "Optimal Control of Linear Econometric Systems with finite time Horizon". International Economic Review, febrero.

CHOW, G.C.(1972-2): "Effects of Uncertainly on Optimal Control Prices". International Economic Review.

CHOW, G.C(1973): "Problem of Economic Policy from the viewpoint of Optimal Control". American Economic Review, diciembre.

CHOW, G.C.(1975): "Analysis and Control Dynamic Economic Systems". John Wiley and Sons Ed.

CHOW, G.C.(1976): "The control of Non-linear Econometric Systems with Unknown Parameters". Econometrica, 44, julio.

CLARKE, F.H.(1976): "Necesary conditions for a general Control Problem". Incluído en: "Calculus of Variations and Control Theory". Ed. David Press; Academic Press, New York.

DANTZIG, G.B.(1966): "Linear Control Processes and Mathematical Programming". SIAM Journal of Control, nº 1.

DANTZIG, G.B. y WOLFE, P.(1961): "The Descomposition Algoritm for Linear Programs". Econometrica, octubre.

DEAL, K.R.(1979): "Optimizing Advertising Expenditures in a Dynamic Duopoly". Operations Research, 27.

DELFOUR, M.C. y MITTER, S.K.(1972): "Controllability, Observability and Optimal Feedback of affine hereditary systems". SIAM Journal of Control, vol. 10.

DHRYMES, P.J.(1962): "On Optimal Advertising Capital and Research Expenditures under Dynamic Conditions". Econometrica, 29 (115).

DIXIT, A.K.(1976): "Optimization in Economic Theory". Oxfor University Press.

DORFMAN, R.(1969): "An Economic Interpretation of Optimal Control Theory". American Economic Review, vol. LIX, nº 5, diciembre.

DOSOER, C.A.(1961): "Pontryagin's Maximum Principle and the Principle of Optimality". J.Franklin Institute.

DREYFUS, S.E.(1965): "Dynamic Programming and the calculus of Variations". Academic Press, N.Y.

DYER, P. y McREYNOLDS, S.R.(1970): "The computations and theory of optimal control". Academic Press, New York.

FAIR, R.C.(1978): "The use of optimal control techniques to measure economic performance". International Economic Review.

FEL'DBAUM, A.A.(1965): "Optimal Control Systems". Academic Press, New York and London.

GANDOLFO, G.(1971): "Mathematical Methods and Models in Economic Dynamics". North-Holland, Ed.

GELFAND, I.M. y FOMIN, S.V.(1963): "Calculus of Variations". Englewood-Cliffs Prentice Hall,N.Y.

GOLDMON, (1968): "Optimal Growth and Continual Planning Revision". Review of Economic Studies, 35 (102).

HADLEY, G.(1964): "Nonlinear and Dynamic Programming". Reading, Mass. Add. Wesley Publishing Co.Inc.

HADLEY, G. y KEMP, M.C.(1971): "Variational Methods in Economics". North-Holland Publishing Co.

HALKIN, J.(1964): "On the necesary conditions for optimal control of nonlinear systems". Journal D'Analyse Mathematique.

HALKIN, H.(1965): "A Generalization of Lasalle's Bang-Bang Principle". SIAM Journal of Control,2.

HESTENES, M.R.(1965): "On Variational Theory and Optimal Control Theory". Journal of SIAM Control, vol. 3, nº 1.

HESTENES, M.R.(1966): "Calculus of Variations and Optimal Control Theory". John Wiley and sons, Inc., New York.

HOLBROOK, S.R.(1972): "Optimal Economic Policy and the Problem of Instrument Inestability". American Economic Review, marzo.

HOTELLING, J. y RAMSEY, M.(1972): "A Mathematical Theory of Saving". Economic Journal, diciembre.

INTRILIGATOR, M.S.(1964): "Regional Allocation of Investment". Quarterly Journal of Economics, LXXIII, noviembre.

INTRILIGATOR, M.(1973): "Optimización matemática y teoría económica". Ed. Prentice Hall.

JOHANSEN, L.(1967): "Some Theoretical Properties of a Two-sector Model of Optimal Growth". Review of Economic Studies, 34 (97).

KALMAN, R.E.(1963): "The Theory of Optimal Control and the Calculus of Variations in Mathematical Optimization Techniques". Ed. R.Bellman. University of California.

KALMAN, R.E.(1970): "Contributions to the Theory of Optimal Control". Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana.

KAMIEN, I. y SCWARTZ, L.(1979): "Dynamic Optimization". North-Holland, Ed.

KAMIEN, I. y SCHWARTZ, L.(1978): "Potential rivalry, monopoly profits and the pace of inventive activity". The Review of Economic Studies, vol. XLV, nº 141.

KENDRICK, D. y TAYLOR, L.J.(1970): "Numerical Solution of Nonlinear Planning Models". Econometrica, vol. 38, nº 3.

KOOPMANS, T.C.(1965): "On the concept of Optimal Economic Growth". The Econometric Approach to Development Planning Pontificial Academic Scientiarum Scriptum Varie. North-Holland.

KOOPMANS, T.C.(1977): "Concepts of Optimality and their uses". American Economic Review, junio.

KUSHNER, H.J. y BAREA, D.I.(1970): "On the control of a linear Differential Equation with Quadratic cost". SIAM Journal of Control, 8.

LANSBERGER, M. y SUBOTNIK, A.(1976): "Optimal Behavior of a Monopolist facing a Bicreteria objetive function". International Economic Review, vol. 17, nº 3, octubre.

LEE, G. y MARKUS, L.(1972): "Foundations of Optimal Control Theory". John Wiley and sons, Ed. N.Y.

LEITMAN, G.(1966): "An Introduction to Optimal Control" McGraw-Hill, New York.

LUENBERGER, D.(1975): "Class notes on dynamic system". John Wiley, Ed.

MANGASARIAN, O.L.(1966): "Sufficient Conditions for the Optimal Control on Nonlinear System". SIAM Journal of Control.

MARTIN-GUZMAN CONEJO, P.(1976): "Un modelo de crecimiento óptimo con aplicación a la economía española". Confederación Española de Cajas de Ahorros.

MILLER, R.E.(1979): "Dynamic Optimization and Economic Applications". McGraw-Hill International.

MILLS, E.S. y FERRANTI, D.M.(1971): "Market Choices and Optimum City Size". American Economic Review, 61 (2).

MODIGLIANI, F. y HOHN, F.(1955): "Production Planning over time and the nature of the expectation and planning horizon". Econometrica, 23 (1).

MURPHY, M.(1980): "Price Controls and the Behavior of the Firm". International Economic Review, junio.

OHTSURI, Y.(1971): "Regional Allocation of Public Investment in a n'Region Economy". Journal of Regional Science, vol. 11, nº 2.

PARS, L.A.(1962): "An Introduction to the Calculus of Variations". Wiley and sons, N.Y.

PETERSON, D.(1973): "The Economic Significance of Auxiliary Functions in Optimal Control". International Economic Review, vol. 14.

POLAK, E.(1973): "An Historial Survey of Computational Method in Optimal Control". SIAM Journal of Control.

PONTRYAGIN, L.S.(1962): "Ordinary Differential Equations". Reading Mass. Allison Wesley Publishing Co. Inc.

PONTRYAGIN, L.S., BOLTYANSKI, V.G., GAMKRELIDZE, R.V. y MISCHENKO, E.F.(1962): "The Mathematical Theory of Optimal Process". Interscience Publishing Inc.

PORTER, W.A.(1971): "A basic Optimization Problem in Linear Systems". Mathematical System Theory.

PUIG ADAM, P.(1967): "Ecuaciones Diferenciales". Ed. Biblioteca Matemática, S.L.

RAHMAN, M.A.(1963): "Regional Allocation of Investment" Quarterly Journal of Economics, LXXII,febr.

ROBINSON, J.(1933): "The Economics of Imperfect Competition". McMillan, Londres.

ROCKAFELLAR, R.T.(1972): "State Constraints in Convex Control Problems of Bolza". SIAM Journal of Control.

ROSENBERGER, R.(1971): "Profit Constraint Revenue Maximization: A Note". American Economic Review, marzo.

ROSS, D.W. y FLUGGE-LOTZ(1969): "An Optimal Control Problem for Systems with Differential-Difference Equation Dynamics". SIAM Journal of Control, vol. 17.

RUSSAK, B.(1970): "On Problems with Bounded State Variables". Journal of Optimization Theory and Applications, 5, february.

SARAKIBARA, M.(1970): "Dynamic Optimization and Economic Policy". American Economic Review, Diciembre.

SAMUELSON, P.A.(1972): "Maximum Principle in Analytical Economics". American Economic Review,junio.

SANCHEZ GARCIA, M.(1976): "Técnicas de Optimización". Instituto de Estudios de Planificación. Presidencia de Gobierno, Madrid.

SCHULTZ, D.G. y MELSA, J.L.(1967): "State functions and linear control systems". McGraw-Hill.

SETHI, S. y THOMPSON, G.(1970): "Applications of Mathematical Control Theory to Finance". Journal of financial and quantitative analysis, nº 5.

SETHI, S. y THOMPSON, G.(1981): "Optimal Control Theory: Applications to Management Science". Martinus Nijkoff Publishing, Boston.

SHELL, K.(1969): "Applications of Pontryagin's Maximum Principle to Economics". Mathematical Systems. Ed. H.W.Kuhn y O.P.Szego, Berlín.

SHELL, K. y CASS, D.(1976): "The Hamiltonian Approach to Dynamic Economics". Academic Press.

SIMON, H.A.(1956): "Dynamic Programming under uncertainty with a Quadratic Criterian Function". Econometrica, 24 (1).

SMITH, D.R.(1974): "Variational Methods in Optimization". Prentice Hall, Ed.

STRAUSS, A. (   ): "An Introduction to Optimal Control Theory". Lecture Notes

TABACALERA, S.A. (Servicio de Estudios): "Memorias anuales"(Distintos años). Madrid.

TAKAYAMA, A.(1967-1): "Behavior of the Firm under Regulatory constraint". American Economic Rev.

TAKAYAMA, A.(1967-2): "Regional Allocation of Investment: A further analysis". Quarterly Journal of Economics, vol. 81.

TAKAYAMA, A.(1974): "Mathematical Economics". Dryden Press, Hinsdale.

VALENTINE, F.A.(1937): "The problem of Lagrange with differential Inequalities as added side conditions". Contributions to the Calculus of Variations. Chicago University Press.

Van de PANNE, C.(1965): "Optimal Strategy Decisions for Dynamic Linear Decision Rules in Feedback Form". Econometrica, mayo.

VOUSDEN, N.(1974): "International Trade and Exhaustible Resources: A Theoretical Model". International Economic Review, febrero.

Reunido el Tribunal que suscribe en el día de la fecha, acordó calificar la presente Tesis Doctoral con la censura de Sobresaliente cum laude

Madrid, 29 de septiembre 81